



DERIVATE E DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

Analisi 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$

Def. (derivata) La funz. f è derivabile in x_0 se esiste in $\mathbb{R}$ il

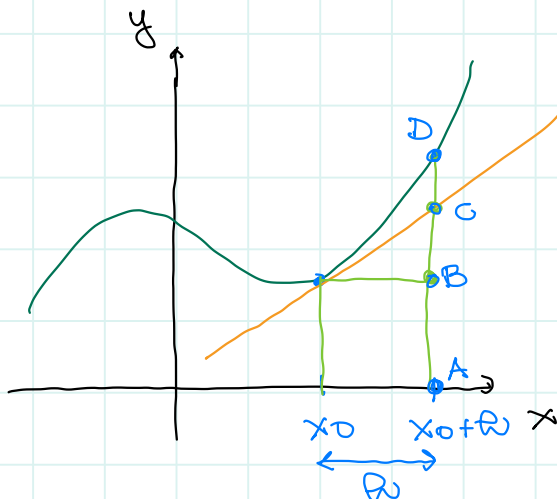
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad [\text{rapporto incrementale}]$$

Def. (differenziale) La funz. f è differenziabile in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Teorema ① f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ è diff. in x_0
(e in tal caso $\alpha = f'(x_0)$)

② f è deriv. in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0
[In generale non vale il viceversa]



$$AD = AB + BC + CD$$

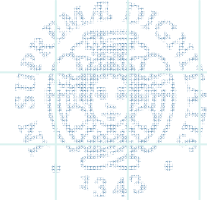
(da interpretare con segue)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0) \cdot h}_{\text{tende a 0 linearmente in } h} + \underbrace{o(h)}_{\text{tende a 0 più velocemente di } h}$$

tende a 0 più velocemente di h

Analisi 2

- Derivate parziali
- Derivate direzionali
- Gradiente
- Differenziale



Setting: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Derivate parziali Se esiste

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + a, y_0) - f(x_0, y_0)}{a} \in \mathbb{R}$$

allora si dice che esiste la derivata parziale di f in (x_0, y_0) rispetto alla variabile x . Si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$f_x(x_0, y_0)$$

$$D_x f(x_0, y_0)$$

Analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = D_y f(x_0, y_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + a) - f(x_0, y_0)}{a}$$

Nel caso generale di $f(x_1, \dots, x_n)$ si pone

k -esimo vettore base canonica



$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = f_{x_k}(x_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + a e_k) - f(x_0)}{a}$$

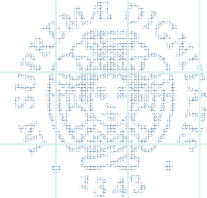
prodotto numero per vettore

Oss. La definizione di derivata parziale coinvolge un limite in UNA SOLA VARIABILE (a è un numero !!!)

Derivate direzionali $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

↑ Direzione



La derivata in x_0 rispetto alla direzione v si definisce come

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + av) - f(x_0)}{a}$$

posto che il lim esista e sia reale.

In $\mathbb{R}^2$ se il punto è (x_0, y_0) e $v = (v_1, v_2)$, allora

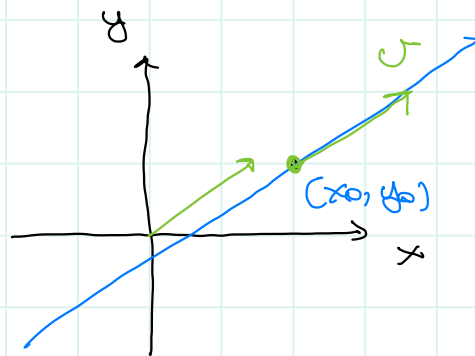
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + av_1, y_0 + av_2) - f(x_0, y_0)}{a}$$

Oss. Alcuni definiscono $\frac{\partial f}{\partial v}$ solo per direzioni v con $\|v\| = 1$.

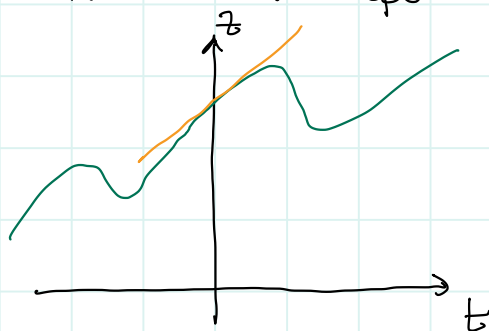
Oss. Le derivate parziali sono speciali derivate direzionali, ottenute prendendo come v uno dei vettori della base canonica.

Interpretazione geometrica

$x_0 + av$, al variare di a , è la retta che passa per x_0 e ha direzione data da v



Posso considerare l'insieme $x_0 + tv$: questo si troverà al tempo t alla quota $f(x_0 + tv)$



La derivata direzionale è la derivata di questa funzione per $t=0$.

Gradiente

Il gradiente di f in x_0 è il vettore n -dimensionale che ha come componenti le derivate parziali in x_0 .
Si indica con $\nabla f(x_0)$
 $\uparrow$ NABLA

Ad esempio in $\mathbb{R}^2$ si ha

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

Differenziale

La funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se esiste $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \underbrace{\langle \alpha, R \rangle}_{\substack{\text{prod. scalare} \\ \vec{x}_0}} + o(\|R\|) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

$\uparrow$ vettore $\uparrow$ vettore incremento $\uparrow$ norma di un vettore
 $\vec{R}$

In $\mathbb{R}^2$, chiamato il punto (x_0, y_0) , e posto (R, k) l'incremento
 $\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{componenti}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{componenti}}$

la formula diventa (ponendo $(\alpha, \beta) = \vec{\alpha}$)

$$f(x_0 + R, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\alpha R + \beta k}_{\substack{\text{costante} \\ \text{lineare nell'incremento} \\ \vec{R} = (R, k)}} + o(\sqrt{R^2 + k^2})$$

per $(R, k) \rightarrow (0, 0)$

LIMITE IN 2 VARIABILI
QUINDI DI ANALISI 2
DI QUELLI CHE HANNO
POCA VOGLIA DI ESISTERE!

Oss. brutale

Nelle derivate parziali / direzionali stiamo facendo incrementi in una sola direzione, nel differenziale ci muoviamo contemporaneamente in TUTTE LE DIREZIONI