



Esempio 1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ [$\frac{0}{0}$ no qualcosa occorre fare]

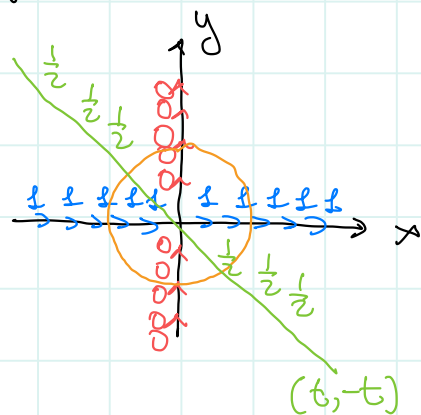
SLOGAN: ad Analisi 2 i limiti NON hanno nessuna voglia di esistere

Come dimostro che un limite non esiste?

Trovo due cammini distinti che tendono al punto in questione sui quali la funzione ha 2 limiti diversi

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$\text{? } (t,0) \rightsquigarrow f(t,0) = \frac{t^2}{t^2} \equiv 1$$



$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = 1$$

quando $t \rightarrow 0$,
l'origine tende al punto $(0,0)$

$$\text{? } (0,t) \rightsquigarrow f(0,t) \equiv 0 \rightsquigarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = 0$$

Abbiamo scoperto che: $\rightarrow$ in tutto l'asse x (origine esclusa) $f \equiv 1$
 $\rightarrow$ in tutto l'asse y (") $f \equiv 0$

Questo impedisce al limite di esistere !!!

(Brutalmente: se il limite fosse $l \in \mathbb{R}$, tutti i valori di f in una $B_\delta(0,0)$ con δ piccolo dovrebbero essere vicini ad l ; se fosse $\pm \infty$ ancora peggio).

$$f(t,-t) = \frac{t^2}{t^2+t^2} \equiv \frac{1}{2} \quad \text{quindi in quella direzione tende ad } \frac{1}{2}$$

Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}$ $\left[\frac{0}{0} \right]$ e gradi usi chiarissimi

Mandiamo ovunque in esplorazione

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) \equiv 0 \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t^2 + t^4} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt^3}{t^2 + m^4 t^4} = 0$$

↑
coeff. ang.
retta generica

Su tutte le rette il limite fa 0. Forse fa davvero 0, ma DEVO DIMOSTRARLO.

Rifaccio il trucco del valore assoluto:

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \right| = |y| \underbrace{\left| \frac{x^2}{x^2 + y^4} \right|}_{\leq 1} \leq |y|$$

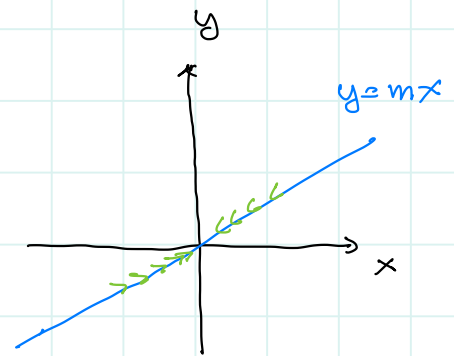
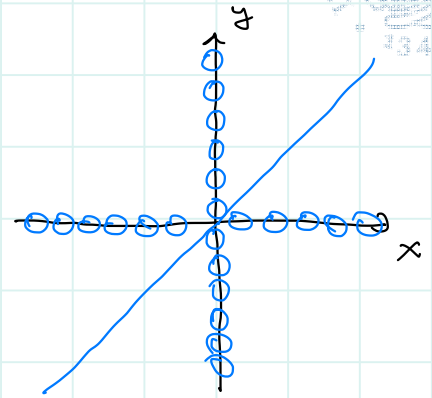
Concludo con i carabinieri.

Esempio 3 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x y^2}{x^2 + y^4}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = 0 \quad (\text{assi})$$

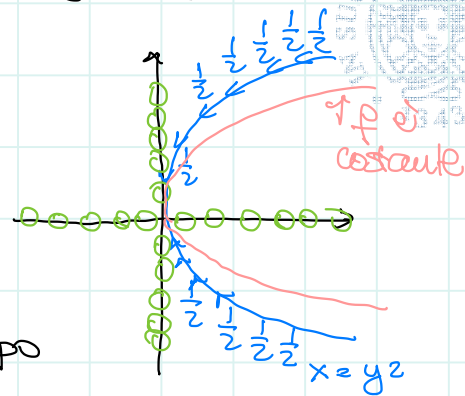
$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2 t^3}{t^2 + m^4 t^4} = 0 \quad (\text{retta } y = mx)$$

Come prima venrebbe da dire che il limite è 0 E INVECE...
non esiste !!!



Per dimostrare la NON esistenza considero un omino del tipo (t^2, t)

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}$$



Più in generale, usando un omino del tipo (mt^2, t) troviamo

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(mt^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt^4}{(m^2+1)t^4}$$

→ f è costante su queste parabole con costante che dipende da m

ACHTUNG! Ragionamento sbagliato: usiamo le coordinate polari

$$\begin{aligned} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) &= \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta} \\ &= \frac{\boxed{\rho \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \rightarrow 0}{\cos^2 \theta + \boxed{\rho^2 \sin^4 \theta} \rightarrow 0} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{0}{\cos^2 \theta} = 0$$

Adesso devo fare tendere $\rho \rightarrow 0$.

Errore grossolano: dire che banalmente tende a 0 perché c'è ρ sopra

Errore + subdolo: distinguo 2 casi

→ se $\cos^2 \theta \neq 0$, allora come sopra funziona

→ se $\cos^2 \theta = 0$, allora siamo sull'asse y , dove abbiamo già dimostrato che il limite fa 0.

FISSARE θ , e fare il limite a θ fisso, è come fare il limite dell'omino sulle sole rette.

Se voglio usare le coordinate polari per dire che il limite fa 0,
devo arrivare a scrivere

$$0 \leq |f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| \leq \boxed{g(\rho)}$$

indipendente da θ e
tende a 0 quando $\rho \rightarrow 0$.

Differenza tra Analisi 1 e 2.

Supponiamo che su tutte le rette $\lim = 0$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Su ogni retta

$$-\varepsilon \leq f(x, y) \leq \varepsilon$$

se (x, y) sono abbastanza vicini a $(0, 0)$

Non è vero che prendendo gli intervallini
arbitrari ottengo una pallina centrata
in $(0, 0)$

