



Percorsi di omivini Esempi in $\mathbb{R}^2$

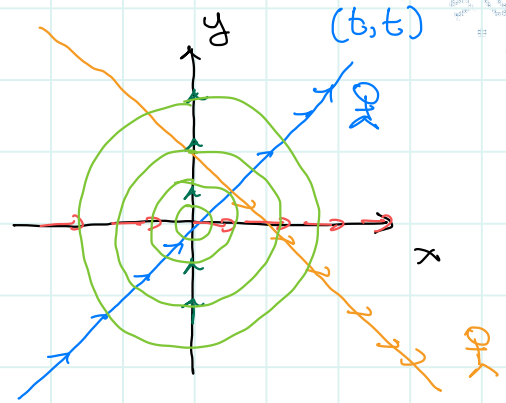
$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

👤 (t,t) percorre la bisettrice

👤 $(t,0)$ percorre asse x

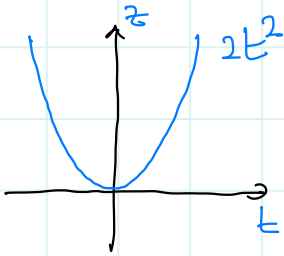
👤 $(0,t)$ percorre asse y

👤 $(t, t+1)$ percorre retta $x+y=1$
 $y=1-x$

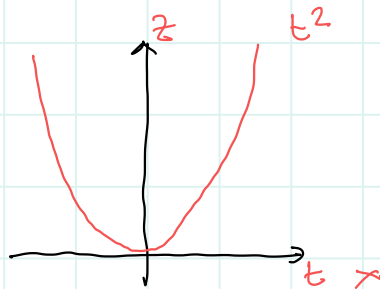


Sostituisco nella funzione

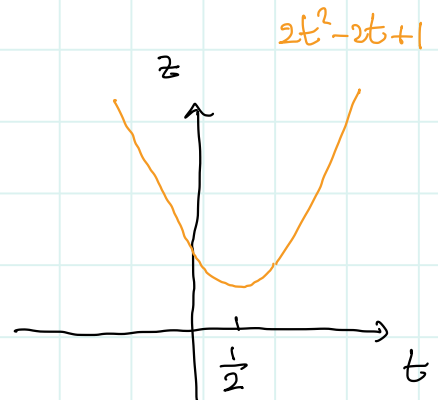
$f(t,t) = t^2 + t^2 = 2t^2$ = quota a cui si trova l'omivino al tempo t mentre percorre la retta



$$f(t,0) = t^2 + 0 = t^2$$



$$f(t, -t+1) = t^2 + (-t+1)^2 = 2t^2 - 2t + 1$$

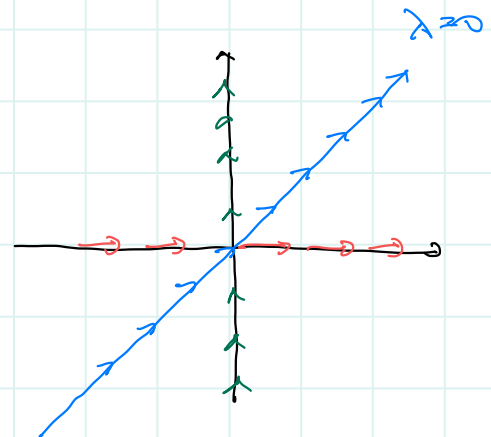
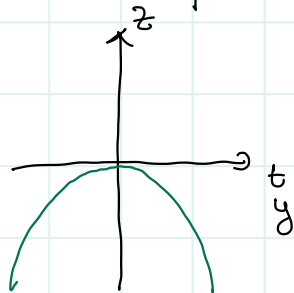
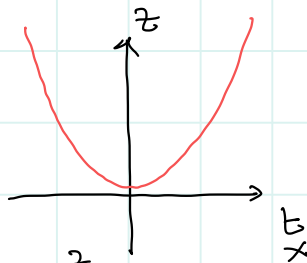


$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$f(t,t) = t^2 - t^2 = 0$$

$$f(t,0) = t^2 - 0 = t^2$$

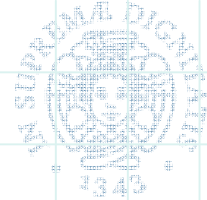
$$f(0,t) = 0 - t^2 = -t^2$$



LIMITI IN n VARIABILI

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

↑ potrebbe anche essere definita in
 $A \subseteq \mathbb{R}^n$



Prendiamo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (notazione vettoriale)

Vogliamo definire

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ← vettore
 è il vettore x che
 tende al vettore x_0

Come tutti i limiti, ci sono 4 possibilità

① esiste ed è $L \in \mathbb{R}$

② $f \rightarrow +\infty$

③ $f \rightarrow -\infty$

④ Non esiste (NESSUNO DEI PREC.)

ogni limite ricade in una
 ed una sola di queste

Def. di ② Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$
 ↑ anche enorme ↑ che ovviamente dipende da M ↑ f "grande" ↑ palla con centro x_0 e raggio δ

Ni aspetto: più M diventa grande, più δ sarà piccolo.

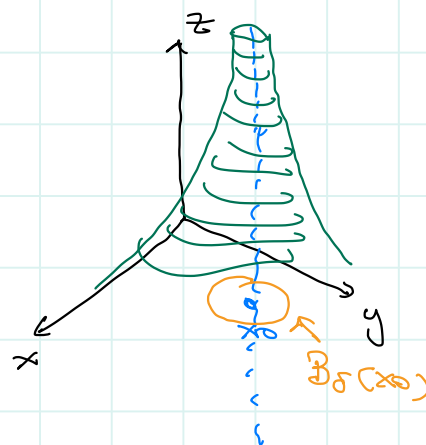
Def. di ③ Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

anche molto negativi

$\forall M \in \mathbb{R}$

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq M$

$\forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$



Definizione di ② Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$

↑
anche molto vicino a 0

↑
dipende da ε

↑
 $f(x)$ è vicino ad l

↑
 $|x - x_0| < \delta$
norma del vettore

Def. Si dice che $f(x)$ è continua in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Domanda: quali funzioni sono continue e dove?

RISPOSTA Tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari mediante oper. algebriche e/o composizioni sono continue dove non presentano pbm. burocratici (denominatori che si annullano, log. di cosa ≤ 0 , ...)

Esempio 1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x e^{xy} + \cos(x^2 y)}{e^{x-3y} + \sin(yx)} = 1 \quad \ddot{\smile}$

[Ho sostituito $(x,y) = (0,0)$ e ho visto che era tutto tranquillo]

Tutti i criteri, tipo

→ confronto

→ Guadagnini

→ teo. algebrici

funzionano come ad Analisi 1.

Esempio 2

lim
 $(x,y) \rightarrow (0,0)$

$$\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

$\left[\frac{0}{0} \right]$ no abbiamo un problema
∴



Dico che il limite esiste e fa 0. Lo dimostro con il trucco del valore assoluto

se $|f(x)| \rightarrow 0$ da qualche parte
allora $f(x) \rightarrow 0$ dalla stessa parte

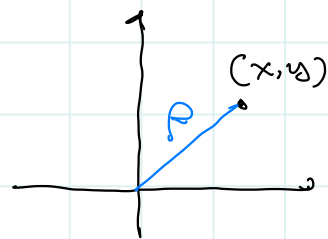
$$\boxed{0} \leq \underbrace{\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right|}_{\substack{\text{per i} \\ \text{Gabinieri}}} = |y| \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\leq 1} \leq \boxed{|y|} \rightarrow 0$$

perché non ci sono problemi

2° modo Uso coord. polari : $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$

$$0 < \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{\rho^3 |\cos^2 \theta \cdot \sin \theta|}{\cancel{\rho^2}} = \rho \underbrace{|\cos^2 \theta \cdot \sin \theta|}_{\leq 1} \leq \boxed{\rho} \rightarrow 0$$

Dire che $(x,y) \rightarrow (0,0)$ come vettore
EQUIVALE a dire che $\rho \rightarrow 0$



Ancora una volta si chiude con il valore assoluto.

[Pbm. con coordinate polari : vedi Det. 2 di Algebra Lineare vol. I Archivio Didattico].