

Esempio 1 $\iint_A \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$

↑ ↑
due esponenti diversi

• $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \geq 1\}$

Idea chiave: paragonare gli esponenti

Cambio di variabili: $x = u^2$ $y = v$

→ La funzione diventa $\frac{1}{u^4+v^4}$ 😊

→ L'insieme diventa $u \geq 0, v \geq 0, u^4+v^2 \geq 1 \rightsquigarrow B$

→ Bisogna calcolare $J = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = 2u$

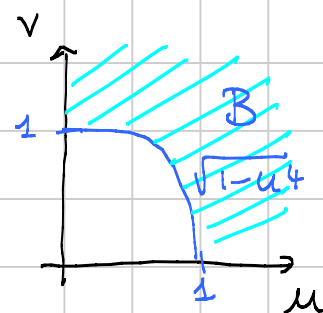
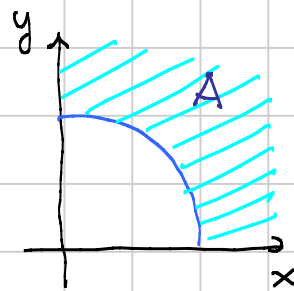
Di conseguenza

$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = \iint_B \frac{1}{u^4+v^4} \cdot 2u du dv$$

e questo con problema all'infinito converge perché

$$\frac{u}{u^4+v^4} \sim \frac{\rho}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^3} \text{ e converge perché } 3 > 2$$

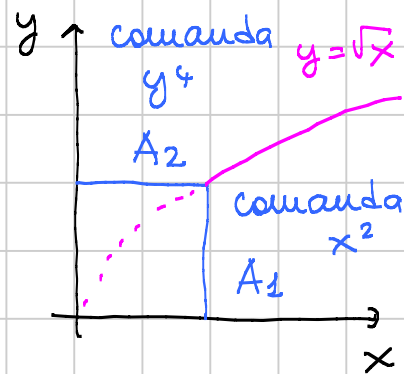
- Con $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$ il conto era simile e diventava divergente.



Modo alternativo di fare il 1° caso

Dividiamo le zone a seconda del termine che comanda

Posso considerare tranquillamente l'esterno del $\square$ invece che di Δ (la differenza è un numero)



$$\frac{1}{x^2 + y^4}$$

I due termini contano = se $y = \sqrt{x}$.

Basta dim. che converge in A_1 e A_2 .

Zona A_1

$$\iint_{A_1} \frac{1}{x^2 + y^4} dx dy = \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \frac{1}{x^2 + y^4}$$

↑ salvo x^2 perché comanda lui

$$\leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \frac{1}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{x} dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \text{ e questo converge } \ddot{\smile}$$

Zona A_2

$$\iint_{A_2} \dots = \int_1^{+\infty} dy \int_0^{y^2} dx \frac{1}{x^2 + y^4}$$

↑ normale asse y

↑ salvo lui

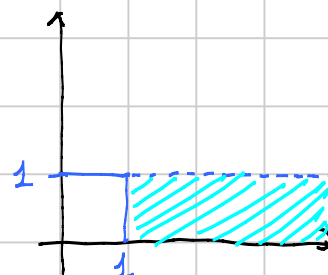
$$\leq \int_1^{+\infty} dy \int_0^{y^2} dx \frac{1}{y^4} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^4} \cdot y^2 dy = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy$$

e questo converge $\ddot{\smile}$

Modo ancora alternativo Fare di brutto la primitiva !!!

Magari rispetto alla x che è più comodo

$$\iint_A \dots = \int_0^1 dy \int_1^{+\infty} dx \dots + \int_1^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} dx \dots$$



li studio separatamente

$$\int_0^1 dy \int_1^{+\infty} dx \frac{1}{x^2+y^4} \leq \int_0^1 dy \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ e questo converge}$$

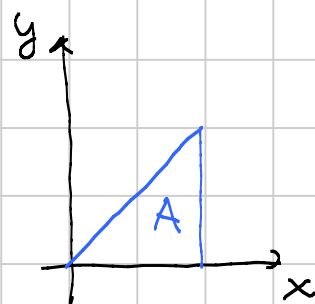
$$\int_1^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^2+y^4} = \int_1^{+\infty} dy \left[\frac{1}{y^2} \arctan\left(\frac{x}{y^2}\right) \right]_{x=0}^{x=+\infty}$$

↑
verificare la primitiva

$$= \int_1^{+\infty} dy \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{1}{y^2} \right\} \text{ e questo converge } \textcircled{\smile}$$

• $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

1° modo Cambio variabili $x = u^2, y = v$

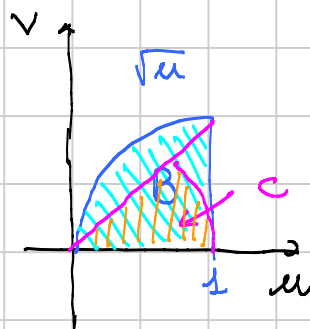


Funzione e J sappiamo cosa sono. Cosa diventa l'insieme A?

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq u^2$$

[Esponente corretto dopo video, che compromette i discorsi successivi (vedi Forum)]

$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = 2 \iint_B \frac{u}{u^4+v^4} du dv$$



$$\geq 2 \iint_C \frac{u}{u^4+v^4} du dv = 2 \int_0^1 dp \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{p \cos \theta}{p^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} \cdot p$$

↑
selett. positiva

= 2 costante

↑
integrale parte
trigonometrica

$$\int_0^1 \frac{1}{p^2} dp$$

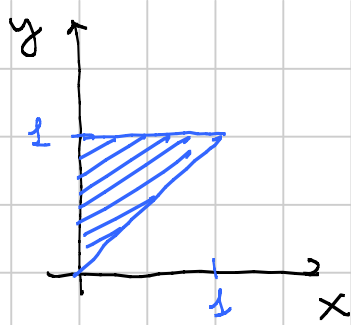
e questo diverge

2° modo Siamo nella zona in cui domina x^2 ($y \leq \sqrt{x}$)

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \frac{1}{x^2+y^4} dx dy &\geq \frac{1}{2} \iint_{\Delta} \frac{1}{x^2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ che diverge.} \end{aligned}$$

• A = altro triangolo

Brutal mode: $\frac{1}{x^2+y^4} \sim$ dipende dalla zona in cui siamo

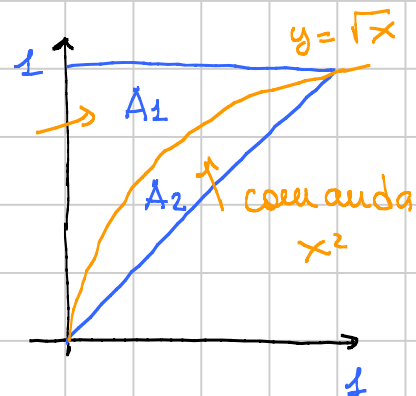


$$\iint_{A_2} \dots = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} dy \frac{1}{x^2+y^4}$$

comanda y^4

$$\geq \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} dy \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2} (\sqrt{x} - x) dx$$

e questo diverge per C.A. con $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}$
(sopra comanda $\sqrt{x}$)



Così per sport andiamo a studiare il caso su A_1

$$\begin{aligned} \iint_{A_1} \dots &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dx \frac{1}{x^2+y^4} \geq \frac{1}{2} \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dx \frac{1}{y^4} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{y^2} dy \text{ che diverge per lei} \end{aligned}$$

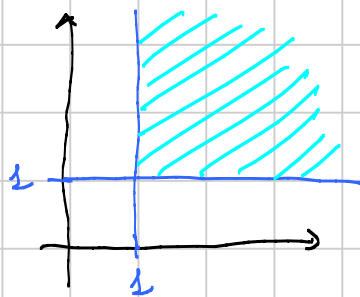
Oss. Quando siamo vicini a 0 si ha che $y^4 \leq y^2$
e quindi

$$\frac{1}{x^2+y^4} \geq \frac{1}{x^2+y^2}$$

e anche questo bastava per sistemare i casi sui triangoli.

Esempio 2 $\iint_A \frac{1}{x^2 y^2 + 1} dx dy$

• $A = [1, +\infty) \times [1, +\infty)$



Brutal mode: $f(x,y) \sim \frac{1}{\rho^4}$ e quindi converge

$$\iint_A \dots \leq \iint_A \frac{1}{x^2 y^2} dx dy = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}_{1} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy}_{1}$$

e quindi converge

• $A = 1^o$ quadrante

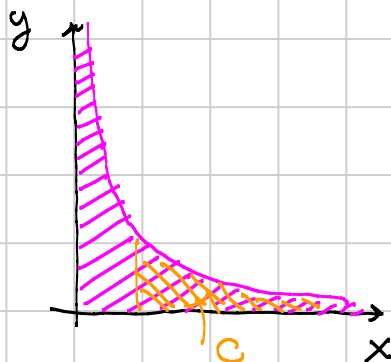
Brutal mode: come prima $\sim \frac{1}{\rho^4}$
 $\Rightarrow$ converge

(Uhm ... vicino agli assi non conviene uolendo questa stima)

Secondo brutal: ci sono grossi problemi dove xy è basso

Considero $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1\}$

In B vale $\frac{1}{x^2 y^2 + 1} \geq \frac{1}{2}$ e quindi



$$\begin{aligned} \iint_A \dots &\geq \iint_B \dots = \frac{1}{2} \iint_B 1 dx dy \geq \frac{1}{2} \iint_C 1 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \text{diverge!!!} \end{aligned}$$

Achtung! L' integrale sul 1° quadrante diverge per colpa del "piccolo" C .

$\uparrow$ [Corretto dopo video]

— o — o —