

Integrali impropri in più variabili

Prerequisiti: $\rightarrow$ tutto il corso AM2-14
 $\rightarrow$ integrali impropri di ANALISI 1

Due integrali fondamentali

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dx dy \quad \begin{cases} \text{converge se } a < 1 \\ \text{diverge se } a \geq 1 \end{cases}$$

$$\sim \frac{1}{\rho^{2a}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{y coord. polari}}}{\rho} = \frac{1}{\rho^{2a-1}} \quad \text{converge} \Leftrightarrow 2a-1 < 1 \Leftrightarrow a < 1$$

$$\iint_{x^2+y^2 \geq R^2} \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dx dy \quad \begin{cases} \text{converge se } a > 1 \\ \text{diverge se } a \leq 1 \end{cases}$$

Due modi di ricordarlo: $\rightarrow$ passando in coord. polari ci si riduce ad analisi 1, dove il cutoff è 1
 $\rightarrow$ senza nemmeno passare, si pensa che per l'integrale di $\frac{1}{\rho^a}$ il cutoff in dimensione d è proprio d .

Esempio 1 $\iint_A \frac{x}{x^2+y^2} dx dy$ su vari insiemi

- $A = \text{palla } x^2+y^2 \leq 1$ Brutal mode $\frac{\rho}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}$ converge perché esponente < 2

Rigorosamente: passiamo in coord. polari

$$\frac{|x|}{x^2+y^2} = \frac{\rho |\cos\theta|}{\rho^2} = \frac{|\cos\theta|}{\rho}$$

e quindi

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{|x|}{x^2+y^2} dx dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{|\cos\theta|}{\rho} \cdot \rho$$

$\downarrow$

$$= 4 \int_0^1 1 d\rho = 4$$

Senza valore assoluto si integra pure e viene 0 per simmetria.

- A : $x^2+y^2 \geq 1$ $\iint \frac{1}{\rho}$ diverge perché gli esponenti buoni ora sono quelli sopra a 2.

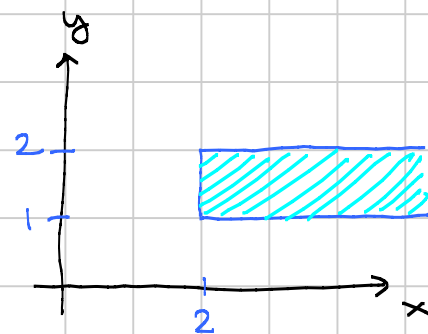
Rigoroso :

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{|x|}{x^2+y^2} dx dy = \dots \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta |\cos\theta| = 4 \int_1^{+\infty} d\rho = +\infty$$

Oss. Quando l'integrale con il valore assoluto fa $+\infty$, di sicuro quello senza non converge (NON È CHE FA 0 per simmetria)

- A = $[2, +\infty] \times [1, 2]$

In questo caso semplice volendo si calcola proprio



1° modo

Calcolo: $\iint_A \frac{x}{x^2+y^2} dx dy = \int_2^{+\infty} dx \int_1^2 dy \frac{x}{x^2+y^2}$

= volendo la primitiva si fa

$$\iint_A \frac{x}{x^2+y^2} dx dy = \int_1^2 dy \int_2^{+\infty} dx \frac{x}{x^2+y^2} = +\infty$$

"brutalmente" $\left[\frac{1}{2} \log(x^2+y^2) \right]_{x=2}^{x=+\infty} = +\infty$

2° modo Stima + analisi 1

Per $(x,y) \in A$ vale $\frac{x}{x^2+y^2} \geq \frac{x}{x^2+4}$ e quindi

$$\begin{aligned} \iint_A \text{dato} &\geq \iint \frac{x}{x^2+4} dx dy = \int_2^{+\infty} dx \int_1^2 dy \boxed{\frac{x}{x^2+4}} \\ &= \int_2^{+\infty} \frac{x}{x^2+4} dx \end{aligned}$$

e questo diverge per conpr. asint. con $\frac{1}{x}$ (Analisi 1!!!)

• $A = [1, 2] \times [1, +\infty)$

1° modo Calcolo esplicito

$$\begin{aligned} \iint_A \dots &= \int_1^{+\infty} dy \int_1^2 dx \frac{x}{x^2+y^2} \\ &= \int_1^{+\infty} dy \left[\frac{1}{2} \log(x^2+y^2) \right]_{x=1}^{x=2} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} dy \log\left(\frac{y^2+4}{y^2+1}\right) \text{ e questo converge perché} \end{aligned}$$

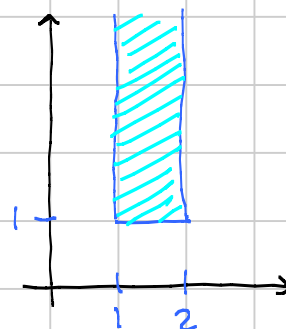
$$\log\left(\frac{y^2+4}{y^2+1}\right) = \log\left(1 + \frac{3}{y^2+1}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quando } y \rightarrow +\infty}}{\sim} \frac{3}{y^2+1}$$

e quindi si ha convergenza per C.A. con $\frac{1}{y^2}$.

Formalmente si tratta di dimostrare che

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{y^2+4}{y^2+1}\right)}{\frac{1}{y^2}} = 3 \quad (\text{Analisi 1!!!})$$

In alternativa, con il trucco dell'1 nascosto (analisi 1!) si poteva anche fare la primitiva.



2° modo Stima + analisi 1

$$\frac{x}{x^2+y^2} \leq \frac{2}{y^2+1} \quad \text{quando } (x,y) \in A$$

↑
num. + grande
denom. + piccolo

[Achtung! Non pensare nemmeno di sostituire entrambe le x con 1 oppure 2]

Da qui in poi è facile

$$\begin{aligned} \iint_A \dots &\leq \iint_A \frac{2}{y^2+1} dx dy = 2 \int_1^{+\infty} dy \int_1^2 dx \frac{1}{y^2+1} \\ &= 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2+1} dy \quad \text{che conv. per analisi 1.} \end{aligned}$$

Esempio 2 $\iint_A \frac{xy^2}{x^6+y^6} dx dy$

• $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 7\}$

Brutal mode: $\frac{\rho^3}{\rho^6} = \frac{1}{\rho^3}$ con $3 > 2 \leadsto$ diverge

In coord. polari diventa

$$\int_0^{\sqrt{7}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho^3 |\cos\theta \sin^2\theta|}{\rho^6 (\cos^6\theta + \sin^6\theta)} \cdot \rho$$

↑↑

$$= \int_0^{\sqrt{7}} \frac{1}{\rho^2} d\rho \int_0^{2\pi} \frac{|\cos\theta \sin^2\theta|}{\cos^6\theta + \sin^6\theta} d\theta$$

↓

Numero positivo
Diverge per Analisi 1.

Osserv. importante da fare: la funzione trigonometrica è ben definita e continua per $\theta \in [0, 2\pi]$.

La cosa importante è che il denominatore è $\geq m > 0$ per ogni θ per i discorsi di inizio corso.

- $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 13 \}$

"Problema all'infinito"

Come prima $\iint_A \dots = \int_{\sqrt{13}}^{+\infty} \frac{1}{\rho^2} d\rho \int_0^{2\pi} |\text{funz. trigo}(\theta)| d\theta$

$\downarrow$ stesso numero positivo di prima
 converge per analisi 1

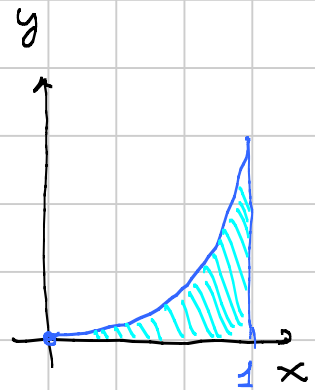
Dal momento che converge con il valore assoluto lo fa anche senza, e quindi converge a 0 per simmetria (ORA POSSIAMO DIRLO)

- $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 \}$

Brutal mode: $\frac{xy^2}{x^6+y^6} \sim \frac{x^5}{x^6+x^{12}} \sim \frac{1}{x}$

$\uparrow$
 per $x \rightarrow 0$

e quindi diverge.



Per dimostrare che diverge vorrei una stima dal basso

$$\frac{xy^2}{x^6+y^6} \geq \dots \text{ se voglio un numeratore pi\u00f9 piccolo posso solo mettere } 0 \quad \text{:(}$$

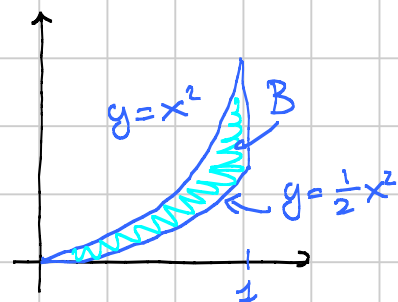
TRUCCO FONDAMENTALE: RESTRINGERE LA ZONA

Considero $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x^2 \leq y \leq x^2 \}$

$$\iint_A \dots \geq \iint_B \dots \text{ perch\u00e9 la } f(x,y) \text{ \u00e8 } \geq 0$$

Ora su B vale che

$$\frac{xy^2}{x^6+y^6} \geq \frac{x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2}{x^6+x^{12}} = \frac{1}{4} \frac{x^5}{x^6+x^{12}}$$



Ora

$$\iint_B \dots \geq \frac{1}{4} \iint_B \frac{x^5}{x^6 + x^{12}} dx dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x^2}^{x^2} dy \frac{x^5}{x^6 + x^{12}}$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^1 \boxed{\frac{x^5}{x^6 + x^{12}} \cdot x^2} dx \rightarrow \text{tende a 0 quando } x \rightarrow 0.$$

e questo converge e non è nemmeno improprio !! 😞

Buco nell'acqua $\iint_A \dots \geq \iint_B \dots \geq \text{numero}$. E allora?

Ah! La stima brutale andava congettura perché sopra cui si aggiunge un x^2 perché l'insieme è "stretto"

Ma allora forse l'integrale su A converge per motivo analogo

$$\frac{xy^2}{x^6 + y^6} \leq \frac{x \cdot x^4}{x^6} = \frac{1}{x} \quad \text{per ogni } (x, y) \in A$$

e quindi

$$\begin{aligned} \iint_A \dots &\leq \iint_A \frac{1}{x} dx dy = \int_0^1 dx \frac{1}{x} \int_0^{x^2} dy = \int_0^1 dx \frac{1}{x} \cdot x^2 \\ &= \int_0^1 x dx = \text{😊} \end{aligned}$$

— 0 — 0 —