

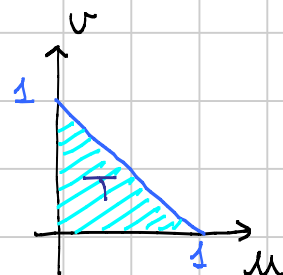
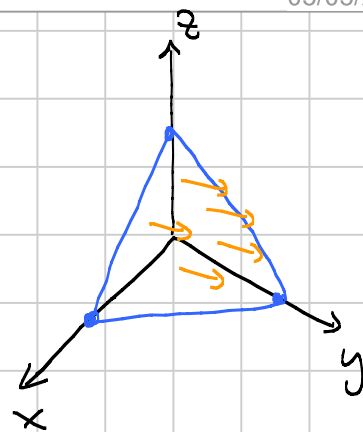
Esempio 1

→ $S =$ triangolo con vertici in $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

→ normale in direzione uscente rispetto all'origine

→ $E = (z, z, x)$

Calcolare $\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$



1° modo Uso definizione.

• Parametrizzo la superficie. Sta su $x+y+z=1 \Rightarrow z=1-x-y$ quindi

$$\Phi(u, v) = (u, v, 1-u-v) \quad (u, v) \in T$$

• Calcolo la normale involta dalla parametrizzazione

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1, 1, 1) \leftarrow \text{osservo che ha il verso giusto}$$

• Calcolo l'integrale

$$\iint_T \left[\underbrace{(1-u-v)}_A \underbrace{1}_{M_1} + \underbrace{(1-u-v)}_B \underbrace{1}_{M_2} + \underbrace{u}_{C} \underbrace{1}_{M_3} \right] du dv = \text{si fa ...}$$

2° modo

Dato che $\vec{E} = (z, z, x)$ si vede che $\text{div } \vec{E} = 0$

quindi posso → cambiare la superficie a parità di bordo

→ invento il rotore e mi riduco ad integrale di linea

Inversione del rotore

$$C_y - B_z = z$$

$$A_z - C_x = z$$

$$B_x - A_y = x$$

$$B = -\frac{1}{2} z^2$$

$$A = \frac{1}{2} z^2 + \varphi(x, y)$$

$\leadsto$

$$-\varphi_y = x \leadsto \varphi(x, y) = -xy$$

Quindi $\vec{F} = (\frac{1}{2} z^2 - xy, -\frac{1}{2} z^2, 0)$ verifica $\text{rot } \vec{F} = \vec{E}$
↑ Formula!

Per il teo. del rotore (aka STOKES)

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{F}, \vec{c} \rangle ds$$
$$= \int_{\partial S} A dx + B dy + C dz$$

$\vec{F} = (A, B, C)$

curva che percorre
 ∂S in maniera
opportuna

$$\gamma_1(t) = (1, 0, 0) + t(-1, 1, 0) = (1-t, t, 0)$$

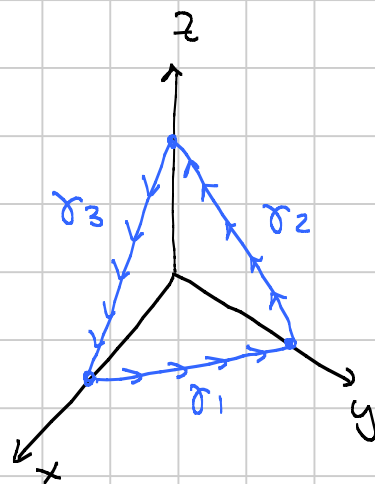
$$\gamma_2(t) = (0, 1-t, t)$$

$$\gamma_3(t) = (t, 0, 1-t)$$

tutte con $t \in [0, 1]$

Quindi non resta che calcolare

$$\underbrace{\int_0^1 -t(1-t)(-1) dt}_{\int_{\gamma_1} \text{forma}} + \underbrace{\int_0^1 (-\frac{1}{2} t^2)(-1) dt}_{\int_{\gamma_2} \text{forma}} + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{2} (1-t)^2 \cdot 1 dt}_{\int_{\gamma_3} \text{forma}}$$



In alternativa, se volevamo cambiare la superficie, occorreva considerare i 3 triangoli delle restanti facce

Orientati come? Orientati verso l'interno della piramide

Morale: se ho divergenza nulla, quello che esce da una parte è quello che entra dall'altra.

Esempio 2 $\rightarrow \vec{E} = (z, z, x)$

$\rightarrow S =$ superficie descritta dalle equazioni

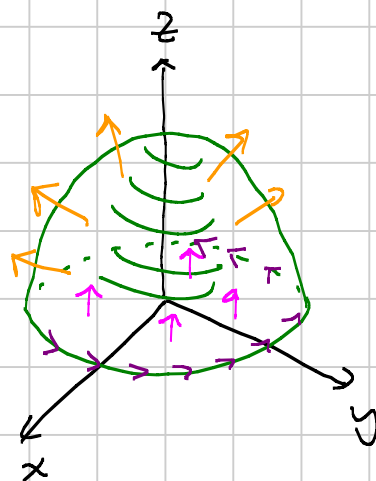
$$x^2 + y^2 + z^4 \leq 4 \quad z \geq 0$$

(metà di una specie di sfera)

$\rightarrow n$ esterna rispetto alla sfera

1° modo

Usare la definizione mi costringerebbe a parametrizzare e con z^4 è un problema, quindi cerchiamo alternative



2° modo

Essendo $\text{div } \vec{E} = 0$, possiamo cambiare superficie.

Quindi basta considerare la base orientata verso l'alto. La base è $x^2 + y^2 \leq 4$ con $z = 0$ e normale $(0, 0, 1)$.

$$\begin{aligned} \int_{\text{Base}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \langle (0, 0, x), (0, 0, 1) \rangle dx dy \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} x dx dy = 0. \end{aligned}$$

3° modo

Potremmo usare Stokes e calcolare l'integrale di

$$A dx + B dy + C dz = \left(\frac{1}{2} z^2 - xy\right) dx - \frac{1}{2} z^2 dy$$

lungo la curva $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\gamma} \dots = \int_0^{2\pi} -4 \cos t \cdot \sin t (-2 \sin t) dt = \text{si fa e viene } 0.$$

4° modo

Si poteva fare con teo. della divergenza usando Ω = tutta la semisfera come solido. Allora

$$\iiint_{\Omega} \text{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$\vec{n}$ normale esterna a $\partial\Omega$

$$= \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma + \int_{\text{Base}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$\downarrow (0,0,-1)$ perché è esterna

da cui

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = - \int_{\text{Base}} \langle \vec{E}, (0,0,-1) \rangle \, d\sigma$$

$\uparrow$ Base $\uparrow$
si compensano e viene lo stesso risultato del 2° modo.

Esempio 3 S è normale come prima, ma $\vec{E} = (x+z, z+y, x+zy)$

Adesso $\text{div} \vec{E} = 1+1+y = y+2 \neq 0$, quindi gli approcci 2 e 3 non funzionano più

Restano solo la definizione (auguri!) oppure il teo. della div.
La formula di sopra ci dice che

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz - \int_{\text{Base}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$(y+2)$ $\uparrow (0,0,-1)$

$$\iiint_{\Omega} (y+2) \, dx \, dy \, dz = 2 \text{ Volume} = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \text{Area}(S_z) \, dz$$

$\downarrow$ per simmetria $\uparrow$ sezioni $\uparrow$ cerchio di raggio $\sqrt{4-z^4}$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (4-z^4) \, dz = \text{si fa facile}$$

$$\int_{\text{Base}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} -x \, dx \, dy$$

$\uparrow$
 sarebbe $x+zy$,
 ma $z=0$

$$= - \iint_{x^2+y^2 \leq 4} x \, dx \, dy = 0 \text{ per simmetria}$$

Oss. Volendo la superficie si parametrizza osservando che le sezioni a z fisso sono circ. di raggio $\sqrt{4-z^2}$

$$\left(\sqrt{4-z^2} \cos \theta, \sqrt{4-z^2} \sin \theta, z \right)$$

con $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, \sqrt{2}]$.

— o — o —