

Quattro strategie per il calcolo di un flusso

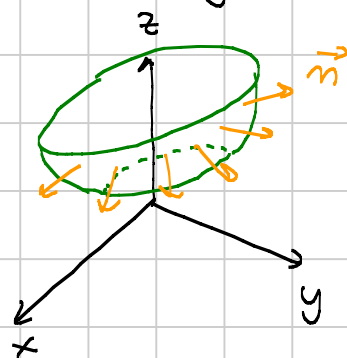
Ingredienti: $\rightarrow$ una superficie S
 $\rightarrow$ una scelta del vettore normale $\vec{n}$
 $\rightarrow$ un campo vettoriale $\vec{E}$

Obiettivo: calcolare

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Flusso di $\vec{E}$ attraverso S
 nella direzione $\vec{n}$

Esempio $\rightarrow$ prendiamo $S =$ la parte di grafico di $z = x^2 + 2y^2$
 compresa tra $z = 1$ e $z = 4$
 $\rightarrow$ come $\vec{n}$ consideriamo il verso
 "uscite" dall'asse z
 $\rightarrow$ consideriamo
 $\vec{E} = (x + yz, -2y, z + x^2)$



Vogliamo calcolare il flusso.

Ci sono almeno 4 modi:

- 1 - Uso la definizione
- 2 - Teo della divergenza
- 3 - Stokes con inversione del rotore
- 4 - Stokes con cambio superficie senza inversione del rotore.

1° modo

- $\rightarrow$ Parametrizzo la sup.
- $\rightarrow$ Calcolo $\vec{n}$ con la formula e controllo che sia quella con il verso giusto
- $\rightarrow$ Concluso con la definizione

Nel nostro caso una parametrizzazione è $(u, v, u^2 + 2v^2)$ con

$$(u, v) \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base}}}{\Omega} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u^2 + 2v^2 \leq 4\}$$

Calcolo della normale

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 4v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-2u, -4v, 1)$$

↑ punta verso l'alto, quindi devo cambiare il verso

$$\vec{n} = (2u, 4v, -1)$$

Uso della formula

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{\Omega} (A M_1 + B M_2 + C M_3) du dv$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\underbrace{(u + v(u^2 + 2v^2))}_{x+yz} \underbrace{2u}_{M_1} - \underbrace{2v}_{-2y} \underbrace{(+4v)}_{M_2} + \underbrace{(2u^2 + 2v^2)}_{z+x^2} \underbrace{(-1)}_{M_3} \right] du dv$$

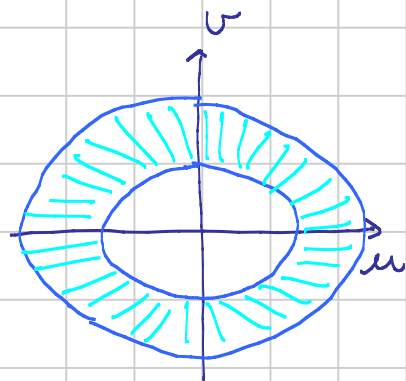
$$= \iint_{\Omega} \left[\cancel{2u^2} + \underbrace{2uv(u^2 + 2v^2)}_{\substack{\downarrow \text{verrà 0 per simmetria}}} - 8v^2 - \cancel{2u^2} - 2v^2 \right] du dv = \text{si fa}$$

$$= -10 \iint_{\Omega} v^2 du dv \quad (\text{con un cambio di variabili } \Omega \text{ diventa una corona circolare})$$

Oss. Considerando $z = x^2 + 2y^2$ con $1 \leq z \leq 4$ possiamo parametrizzare come

$$\left(\sqrt{v} \cos \theta, \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2}} \sin \theta, v \right) : (\theta, v) \in [0, 2\pi] \times [1, 4]$$

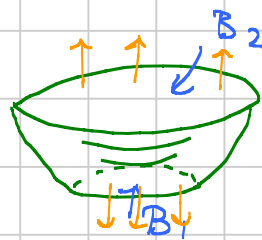
[Provare a rifare i conti con questa nuova parametrizz.]



2° modo

→ Aggiungo i "tappi"

→ Uso teorema della divergenza sul solido che viene fuori



Considero il solido Ω ottenuto aggiungendo le due basi. Allora

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_S \dots + \int_{B_1} \dots + \int_{B_2} \dots$$

quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz - \int_{B_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma - \int_{B_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$$E = (x+yz, -zy, z+x^2) \leadsto \operatorname{div} \vec{E} = 1-2+1=0 \quad \ddot{u}$$

$$\int_{B_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = - \int_{B_1} (z+x^2) \, dx \, dy = \int_{B_1} (x^2+1) \, dx \, dy = \text{si fa}$$

$\uparrow$
su B_1 è $(0,0,-1)$ $\uparrow$
 $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 \leq 1 \}$

$$\int_{B_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{B_2} (z+x^2) \, dx \, dy = \int_{B_2} (4+x^2) \, dx \, dy = \text{si fa}$$

$\uparrow$
su B_2 è $(0,0,1)$ $\uparrow$
 $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 \leq 4 \}$

Da qui si arriva al flusso voluto.

3° modo

→ Spero che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ (non funziona sempre)

→ Trovo $\vec{F}$ tale che $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{E}$

→ Concludo con formula di STOKES (aka too, rotate)

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_S \langle \operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_S \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle \, ds$$

$\uparrow$
STOKES

curva che percorre
 ∂S con il VERSO
GIUSTO

$$= \int_{\partial S} (A \, dx + B \, dy + C \, dz)$$

$\leftarrow \vec{\tau}$

Nel nostro caso $\text{div } \vec{E} = 0$. Cerco $\vec{F} = (A, B, C)$ tale che
 $\text{rot } \vec{F} = \vec{E}$

$$\begin{cases} C_y - B_z = x + yz \\ A_z - C_x = -2y \\ B_x - A_y = z + x^2 \end{cases} \quad \text{Mettiamo } C \equiv 0 \quad \begin{cases} -B_z = x + yz \\ A_z = -2y \\ B_x - A_y = z + x^2 \end{cases}$$

$$B = -xz + \frac{1}{2}yz^2$$

$$A = -2yz + \varphi(x, y)$$

Sostituendo nella 3ª: $B_x - A_y = z + x^2 \Leftrightarrow$

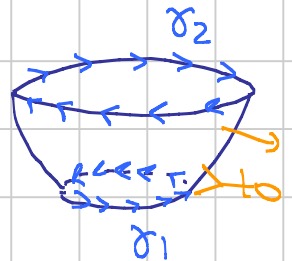
$$-z + 2z - \varphi_y = z + x^2 \quad \leadsto \quad \varphi = -yx^2$$

Quindi una possibilità è $F = (-2yz - yx^2, -xz + \frac{1}{2}yz^2, 0)$

Conclusione: basta calcolare

$$\int_{\gamma} [(-2yz - yx^2) dx + (-xz + \frac{1}{2}yz^2) dy]$$

Chi è γ ? Sono curve che descrivono ∂S e lo percorrono, avendo la testa rivolta nella direzione di $\vec{n}$, lasciando S a sx.



Quindi i versi sono quelli indicati in figura

$$\gamma_1(t) = \left(\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, 1 \right) : t \in [0, 2\pi] \quad x^2 + 2y^2 = 1$$

$$\gamma_2(t) = \left(2\cos t, \sqrt{2} \sin t, 4 \right) : t \in [0, 2\pi] \quad x^2 + 2y^2 = 4$$

↑ POI INVERTIRE IL VERSO

$$\int_{\gamma} A dx + B dy + C dz = \int_{\gamma_1} \dots - \int_{\gamma_2} \dots$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \cos^2 t \right) (-\sin t) dt$$

$A dx$ su γ_1

$$+ \int_0^{2\pi} \left(-\cos t + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \, dt$$

Bdy su ∂_1

Analogamente per l'integrale su ∂_2

Oss. Vengono quasi tutti nulli oppure $\sin^2$ o $\cos^2$.

Quindi sono tutti una semplifica.

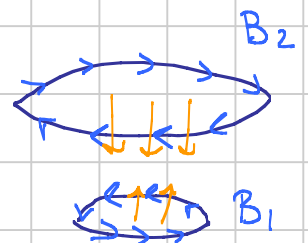
4° modo Dopo aver osservato che $\vec{E} = \text{rot } \vec{F}$ abbiamo che

$$\int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle ds = \int_{S_1} \langle \underbrace{\text{rot } \vec{F}}_{\vec{E}}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

su una qualunque superficie S_1 che abbia $\partial S_1 = \partial S$ e stessa orientazione.

Quindi posso fare il flusso su un'altra superficie che abbia lo stesso bordo. In questo caso uso come S_1 i 2 tappi, orientati come in figura

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_{B_1} \langle \vec{E}, (0,0,1) \rangle d\sigma \\ &+ \int_{B_2} \langle \vec{E}, (0,0,-1) \rangle d\sigma \end{aligned}$$



e questo porta esattamente allo stesso conto del secondo modo.

Strategia:
 → Spero che $\text{div } \vec{E} = 0$ (non funziona sempre)
 → invece di calcolare il flusso attraverso S , calcolo il flusso attraverso una S_1 più comoda che abbia lo stesso bordo (OCCHIO A COME ORIENTARE LA NUOVA S_1).

— o — o —