

Esempio 1 Curva $\gamma(t) = (t(1-t), t^2(1-t))$ con $t \in [0, 1]$

Dimostrare che γ è chiusa e semplice e integrare y sull'insieme Ω di cui è bordo

Chiusura: $\gamma(0) = (0, 0)$ $\gamma(1) = (0, 0)$ ok

Semplicità:

1° modo Imposto il sistema

$$\begin{cases} t(1-t) = s(1-s) \\ t^2(1-t) = s^2(1-s) \end{cases} \quad \begin{cases} t-t^2 = s-s^2 \\ t^2-t^3 = s^2-s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} t-s = (t+s)(t-s) \\ t^2-s^2 = t^3-s^3 \end{cases}$$

Dalla 1ª equazione abbiamo 2 possibilità

- $t=s$, e allora siamo contenti
- semplifico $t-s$ e resta $t+s=1$

La 2ª equazione si scrive come $(\cancel{t-s})(t+s) = (\cancel{t-s})(t^2+ts+s^2)$
 $\uparrow$ nel caso $t \neq s$ semplifico

Sostituendo $s=1-t$ diventa

$$1 = t^2 + t(1-t) + (1-t)^2 \leadsto 1 = t^2 + t - t^2 + 1 - 2t + t^2 \leadsto 1 = 1 - t \leadsto t=0$$

$$\leadsto t^2 = t \leadsto t(t-1) = 0 \rightarrow t=0 \leadsto s=1 \quad \rightarrow t=1 \leadsto s=0 \quad \text{estremi}$$

Quindi la curva è semplice.

Modo alternativo di risolvere il sistema: brutalmente se divido la 2ª equazione per la prima ottengo $t=s$ direttamente.

Ma posso dividere? Se e solo se $t(1-t) \neq 0$. Quindi restano da fare a mano i casi $t=0$ e $t=1$ che conducono comunque agli estremi.

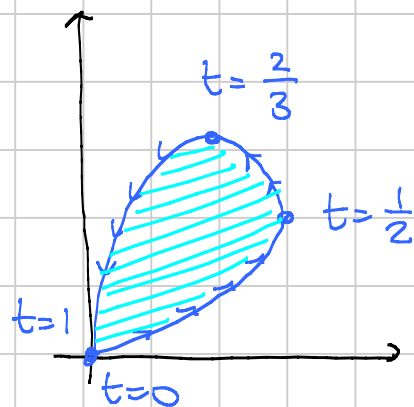
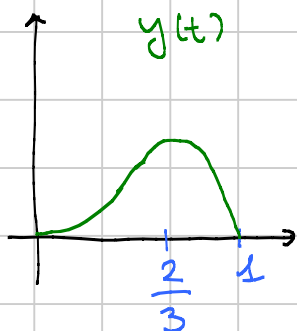
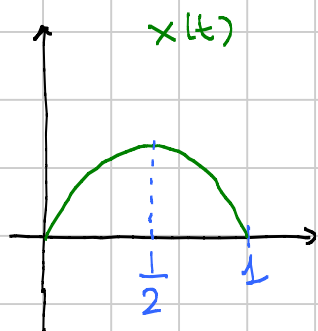
2° modo Consideriamo $f(x, y) = \frac{y}{x}$. Allora
 $f(x(t), y(t)) = t$, che è monotono in $[0, 1]$.

Occhio però che si può dividere solo quando $x(t) \neq 0$, quindi occorre (rebbe) considerare a parte i casi $t=0$ e $t=1$ e vedere che questo porta ad avere pure $s=0$ e $s=1$.

Oss. Se una curva è chiusa, allora non può esserci una $f(x,y)$ definita ovunque tale che $f(x(t), y(t))$ sia monotona.

Disegno della curva

$$\gamma(t) = (t - t^2, t^2 - t^3)$$



- Per $t \in [0, \frac{1}{2}]$ si ha $x(t) \nearrow$ e $y(t) \nearrow$
- Per $t \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ si ha $x(t) \searrow$ e $y(t) \nearrow$
- Per $t \in [\frac{2}{3}, 1]$ si ha $x(t) \searrow$ e $y(t) \searrow$ (questo non basta per la semplicità, vedi VIDEO)

Integro y (verrà > 0) scegliendo $\vec{E} = (xy, 0)$ opp. $(0, \frac{1}{2}y^2)$

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy = \int_{\gamma} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{verso ok}}}{xy} \, dy = \int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{t(1-t)} \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{t^2(1-t)} \underset{\substack{\uparrow \\ y'(t)}}{(2t - 3t^2)} \, dt = \text{si fa}$$

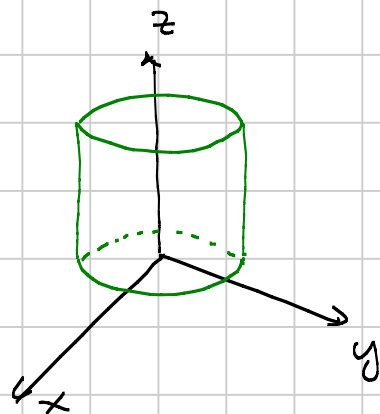
Esempio 2 Ω limitato dalla superficie

$$(\sin t, \cos t, v^2) : (t, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$$

e dai piani $z=0$ e $z=1$

$$\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$$

Il supporto della superficie è la sup. laterale di un cilindro. Fissato v , la param. descrive una circ. con centro nell'origine, raggio 1, e terza coord = v^2 , che quindi varia tra 0 e 1 (non cambiava nulla se invece di v^2 c'era v oppure v^3 oppure v^{33}).



1° modo Per sezioni o per colonne.
Ad esempio

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dz \cdot z \cdot \text{Area}(S_z) \\ &= \pi \int_0^1 z \, dz = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2° modo Teorema della divergenza cercando E con $\text{div } E = z$,
ad esempio $E = (0, 0, \frac{1}{2}z^2)$

$$\iiint_{\Omega} \text{div } E \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial\Omega} \langle \hat{E}, \hat{n} \rangle \, d\sigma$$

Il bordo è l'unione di 3 pezzi

- il cerchio sotto con normale $(0, 0, -1)$
- il cerchio sopra con normale $(0, 0, 1)$
- la sup. laterale, di cui calcolo la normale con la formula

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (2v \cos t, 2v \sin t, 0)$$

↑
grande notizia perché
 $\cos t \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = 0$ su
questo pezzo

Una piccola verifica, ad esempio
quando siamo nel 1° quadrante
nelle variabili x e y , ci dice che la normale è uscente

Non resta che calcolare l'integrale sulle due basi

$$\int_{\text{Base sotto}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = 0 \quad \because$$

$\uparrow$
= 0 nella base sotto

$$\int_{\text{Base sopra}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\text{Base sopra}} \langle (0, 0, \frac{1}{2}), (0, 0, 1) \rangle d\sigma$$

$$= \frac{1}{2} \text{Area (Base sopra)} = \frac{\pi}{2}.$$

3° modo Teorema della divergenza con scelta $E = (xz, 0, 0)$
Ancora una volta devo fare

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \text{somma di 3 pezzi}$$

Osserviamo che $\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = 0$ nelle basi sopra e sotto ($\vec{E}$ ha solo 1ª componente, $\vec{n}$ ha solo la 3ª).

Quindi resta solo la sup. laterale del cilindro dove

$$\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = \langle (xz, 0, 0), (2v \cos t, 2v \sin t, 0) \rangle$$

$$= \langle (\cos t \cdot v^2, 0, 0), (2v \cos t, 2v \sin t, 0) \rangle$$

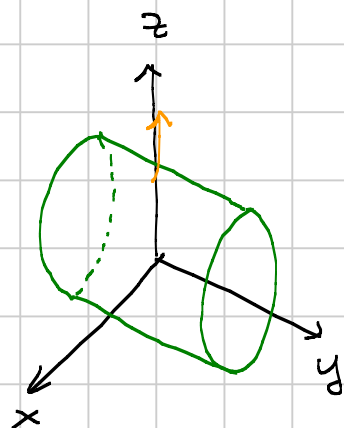
$$= 2v^3 \cos^2 t$$

Quindi resta

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 dv \, 2v^3 \cos^2 t = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt}_{\pi} \underbrace{\int_0^1 2v^3 \, dv}_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Esempio 3 Ω limitato da $(\sin t, \cos v, \cos^3 t)$: $(t, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$
e dai piani $y=1$ e $y=-1$.
Supponiamo di integrare y^2

L'insieme è una specie di cilindro lungo
asse y : il termine $\cos v$ va da -1 a 1 e
fissato v resta $(\sin t, \cos^3 t)$ che è una specie
di circonf. in (x, z)



1° modo Teo divergenza con $E = (0, \frac{1}{3}y^3, 0)$

Calcoliamo la normale della sup. laterale:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \cos t & 0 & 3 \cos^2 t \sin t \\ 0 & -\sin t & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (3 \cos^2 t \sin t \sin v, 0, -\cos t \sin v)$$

$\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = 0$ sulla sup. laterale

Per vedere se il verso è corretto, prendiamo

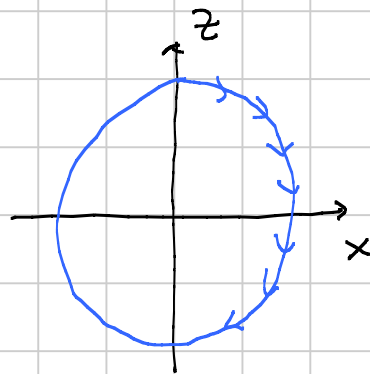
$t=0$ e $v = \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow (0, 0, -1)$ ↖ va cambiata di segno perché in $(0, 0, 1)$

e il punto corrispondente è $(0, 0, 1)$ dove puntare verso l'alto

In realtà in questo caso

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_{\text{Base } y=-1} \dots + \int_{\text{Base } y=1} \dots \\ &= \int_{\text{Base } y=-1} \langle (0, -\frac{1}{3}, 0), (0, -1, 0) \rangle + \int_{\text{Base } y=1} \langle (0, \frac{1}{3}, 0), (0, 1, 0) \rangle \\ &= \frac{2}{3} \underline{\text{Area (Base)}} \\ &\quad \text{"si fa con teo. della divergenza nel piano"} \\ &= \frac{2}{3} \int_{\partial \text{Base}} x dz = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} dt \sin t \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t) dt \end{aligned}$$

La curva $(\sin t, \cos^3 t)$ gira nel verso sbagliato, quindi occorre cambiare segno.



2° modo Scelgo $E = (0, 0, y^2 z)$. Così le 2 basi non contribuiscono, e sulla sup laterale resta

$\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = y^2 z \cos t \sin v = \cos^2 v \cos^3 t \cos t \sin v$ e quindi

cambio segno alla normale di sopra resta da fare

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^{\pi} dv \cos^4 t \cdot \cos^2 v \sin v$$

— 0 — 0 — 0 [Controllare vengano uguali!]