

Integrale di funzioni su insiemi descritti mediante il bordo

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

↑ descritto mediante il bordo

Strumento: teo. della divergenza

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{m} \rangle ds = \int_{\gamma} A dy - B dx$$

↑
 $\vec{E} = (A, B)$

↑
normale esterna a $\partial\Omega$

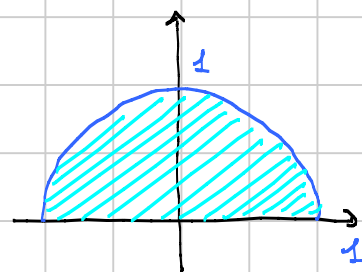
↑
sistema di curve che percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω a sx

Esempio 1 Ω limitato da $(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$ e retta $y=0$

$$f(x, y) = y$$

1° modo Classico in coord. polari

$$\int_0^1 dp \int_0^\pi d\theta \quad p \sin \theta \cdot p = \underbrace{\int_0^1 p^2 dp}_{\frac{1}{3}} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2 = \frac{2}{3}$$



2° modo Classico in coord. cartesiane normale asse x

$$\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \int_0^1 (1-x^2) dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

↑
funzione
PARI

3° modo Classico normale asse y:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y dx = \int_0^1 2y \sqrt{1-y^2} dy = \left[-\frac{2}{3} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}$$

4° modo

Teorema della divergenza. Scelgo $\vec{E}$ t.c. $\text{div } \vec{E} = y$.

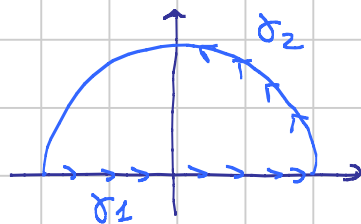
Ad esempio

$$\vec{E}(x,y) = (xy, 0)$$

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} = \int_{\gamma} xy \, dy \quad \text{dov'è solo scegliere } \gamma$$

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad \text{con } t \in [-1, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{con } t \in [0, \pi]$$



$$\int_{\gamma} xy \, dx = \int_{\gamma_1} \dots + \int_{\gamma_2} \dots = \int_{-1}^1 \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{t} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{0} \cdot dt + \int_0^{\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{\cos t} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{\sin t} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{y}(t)}}{\cos t} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \cos^2 t \cdot \sin t \, dt = \left[-\frac{1}{3} \cos^3 t \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{3}$$

5° modo

Ancora teorema della divergenza, ma $\vec{E} = (0, \frac{1}{2}y^2)$

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy = \int_{\gamma} -\frac{1}{2}y^2 \, dx = -\frac{1}{2} \int_{\gamma_1} y^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\gamma_2} y^2 \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{0} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{x}(t)}}{1} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 t \cdot (-\sin t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^3 t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin t (1 - \cos^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\sin t - \cos^2 t \sin t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{2} \left[-(-1) + \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1 + \frac{1}{3}) \right] = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right] = \frac{2}{3} \quad \text{😊}$$

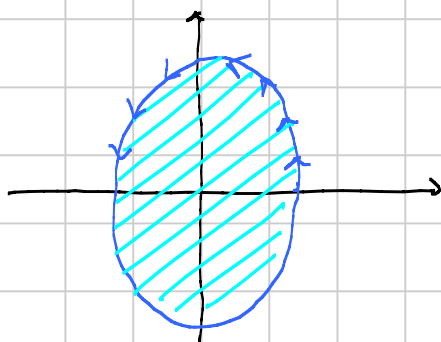
Esempio 2 Ω limitato da $(\cos t, 2 \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

Voglio integrare xy

1° modo

Cerco $\vec{E}$ con $\text{div } \vec{E} = xy$

$$\vec{E} = \left(\frac{1}{2}x^2y, 0 \right)$$



$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy = \int_{\gamma} \overset{A}{\frac{1}{2} x^2 y} \, dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \underset{\uparrow x(t)^2}{\cos^2 t} \cdot \underset{\uparrow y(t)}{2 \sin t} \cdot \underset{\uparrow \dot{y}(t)}{2 \cos t} \, dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \cos^3 t \cdot \sin t \, dt = \left[-\frac{1}{2} \cos^4 t \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

↑
verifica!

2° modo Idem con $\vec{E} = (0, \frac{1}{2} x y^2)$

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy = - \int_{\gamma} \underset{-B \, dx}{\frac{1}{2} x y^2} \, dx = - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos t \cdot 4 \sin^2 t (-\sin t) \, dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot \cos t \, dt = \left[\frac{1}{2} \sin^4 t \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0 - 0 = 0.$$

3° modo Osservo che Ω insieme e l'ellisse di equazione

$$4x^2 + y^2 \leq 4$$

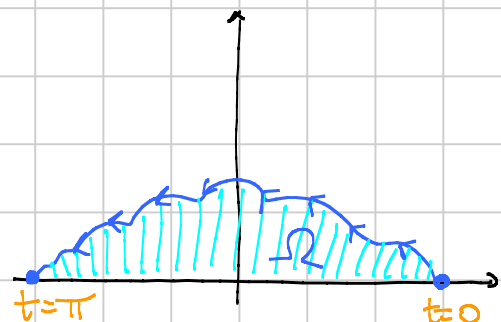
e quindi l'integrale di y si annulla per simmetria.

Esempio 3 Ω limitato da $(\cos t, t(\pi-t)) \quad t \in [0, \pi]$
e dall'asse x . ↑ $x(t)$ ↑ $y(t)$

Vogliamo integrare x

Come è fatta la curva? $\gamma_1(0) = (1, 0)$
 $\gamma_1(\pi) = (-1, 0)$
 $y(t) > 0$ per $t \in (0, \pi)$

Inoltre $x(t)$ è monotona decrescente,
quindi la curva è semplice.



Cerco $\vec{E}$ con $\text{div } \vec{E} = x$. Ad esempio $\vec{E}_1 = (\frac{1}{2}x^2, 0)$
oppure $\vec{E}_2 = (0, xy)$

Cerco σ che percorra $\partial\Omega$ nel verso giusto. Posso usare σ_1 seguita da $\sigma_2(t) = (t, 0)$ con $t \in [-\pi, \pi]$

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E}_1 \, dx \, dy = \int_{\sigma_1} \frac{1}{2} x^2 \, dy + \int_{\sigma_2} \frac{1}{2} x^2 \, dy$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cos^2 t (\pi - 2t) \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} t^2 (\pi - 2t) \, dt = \text{si fa}$$

[Aggiunto dopo video: qui si sta usando σ_2 , quindi verrebbe 0 :)]

oppure con E_2 :

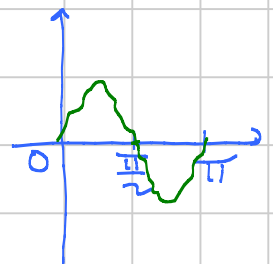
$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E}_2 \, dx \, dy = - \int_{\sigma_1} xy \, dx - \int_{\sigma_2} xy \, dx$$

$$= - \int_0^{\pi} \underbrace{\cos t}_{x(t)} \underbrace{t}_{y(t)} (\pi - t) \underbrace{(-\sin t)}_{x'(t)} \, dt - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cdot 0 \, dt}_0$$

[Aggiunto dopo video: si sta usando σ_2 , quindi sarebbe $t \cdot 0 \cdot 1 \, dt$]

↓ volendo si fa, o ancora meglio si osserva che l'integranda è "dispari rispetto a $\frac{\pi}{2}$ ", cioè detta $f(t)$ la funzione che vogliamo integrare, vale che

$$f\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

"?"

$$- \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \left(\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

I due centrali sono uguali, quindi ci si riduce a

$-\sin \alpha$

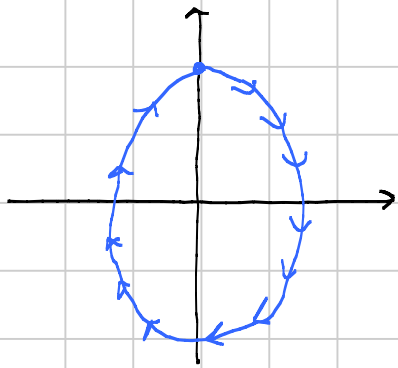
$\cos \alpha$

$-\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \text{ok.}$$

Esempio 4 Ω limitato dalla curva $\gamma(t) = (\sin t, \cos^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$
 Vogliamo integrare x^2

Scegliendo $\vec{E} = (\frac{1}{3}x^3, 0)$ viene



$$\iint_{\Omega} x^2 dx dy = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy$$

$$= \int_{\gamma} \frac{1}{3} x^3 dy$$

↑
 curva data cambiata
 di verso in modo da
 lasciare Ω a sx

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \sin^4 t dt = \text{con un po' di fatica si fa}$$

Scegliendo $\vec{E} = (0, x^2 y)$ diventa

$$-\int_{\gamma} x^2 y dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^3 t \cdot \cos t dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot \cos^4 t dt$$

↑
 cambio
 verso

= non è difficile vedere che è
 analogo al precedente.

Se volessi equazione di Ω verrebbe

$$x^2 + |y|^{\frac{2}{3}} \leq 1$$

e quindi con molta buona volontà potrei fare in coord. cartesiane

$$\iint_{\Omega} x^2 dx dy = 4 \iint_{\text{parte nel 1° quadrante}} x^2 dx dy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{(1-x^2)^{3/2}} dy x^2$$

$$= 4 \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{3/2} dx = \text{si fa}$$

$x = \sin t$

— 0 — 0 —