

Calcolo del flusso uscente da un insieme Ω del piano o dello spazio

Ingredienti : $\rightarrow$ insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ o $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$
 $\rightarrow$ un vettore $\vec{E}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$
oppure $\vec{E}(x,y,z) = (A(x,y,z), B(\dots), C(\dots))$

Calcolare $\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$ $\rightarrow$ integr. curvilineo nel piano
 $\rightarrow$ " superf. nello spazio
 $\uparrow$
VERSORE
normale esterno

Nel piano : $\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma} A dy - B dx$
 $\uparrow$
sistema di curve che percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra

Nello spazio : $\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_G (A M_1 + B M_2 + C M_3) du dv$

dove $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione di $\partial\Omega$ che fornisce il versore normale con la giusta orientazione.

Si intende che $\Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$ e

$$A M_1 \rightsquigarrow A(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) M_1(u,v) \dots$$

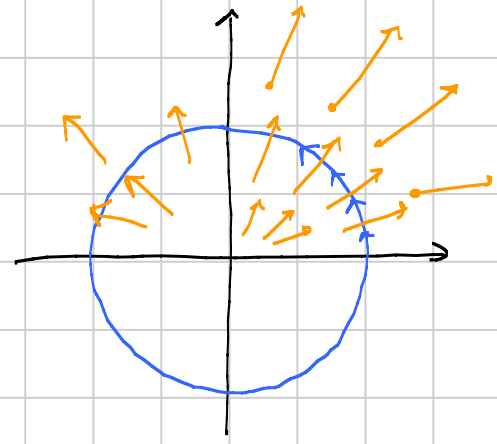
TEOREMA DELLA DIVERGENZA

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \int_{\partial\Omega^+} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

IDEA IN 3
VARIABILI

Esempio 1 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\vec{E}(x,y) = (x,y)$

Dal disegno l'integrale sarà per forza positivo



1° modo Uso la formula

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma} A dy - B dx$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

$$= \int_{\gamma} x dy - y dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi$$

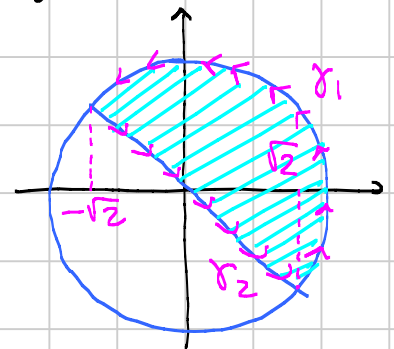
2° modo Teorema della divergenza:

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \iint_{\Omega} 2 dx dy = 2 \operatorname{Area}(\Omega) = 2\pi$$

Esempio 2 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4, x+y > 0\}$

$$\vec{E}(x,y) = (x^2 y, x+y)$$

1° modo $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$
 $\gamma_2(t) = (t, -t)$ con $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$



$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} x^2 y dy - (x+y) dx$$

[Dopo video: ovviamente $\gamma_1(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, il che cambia i conti successivi]

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\underbrace{\cos^2 t \sin t \cdot \cos t}_{x^2 y} - \underbrace{(\cos t + \sin t)}_{x+y} \underbrace{(-\sin t)}_{\dot{y}} \right] dt$$

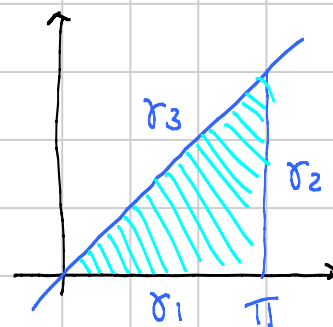
$$+ \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} t^2 (-t) (-1) - 0 = \text{si fanno } (= \text{FARLI !!})$$

2° modo Via teo. divergenza

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \iint_{\Omega} (2xy+1) dx dy \\&= \operatorname{Area}(\Omega) + 2 \iint_{\Omega} xy dx dy \\&= 2\pi + 2 \int_0^2 dp \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \quad p \cos \theta \quad p \sin \theta \quad p\end{aligned}$$

Esempio 3 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq \pi\}$

$$\vec{E} = (y \cos x, x^3 + \sin y)$$



1° modo $\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [0, \pi]$

$\gamma_2(t) = (\pi, t)$ con $t \in [0, \pi]$

$\gamma_3(t) = (t, t)$ con $t \in [0, \pi]$ e verso contrario

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup (-\gamma_3)} y \cos x dy - (x^3 + \sin y) dx$$

$$\left. \begin{aligned}\int_{\gamma_1} \dots &= \int_0^\pi (0 - t^3) dt \\ \int_{\gamma_2} \dots &= \int_0^\pi [-t - (\pi^3 + \sin t) \cdot 0] dt \\ \int_{-\gamma_3} \dots &= - \int_0^\pi [t \cos t \cdot 1 - (t^3 + \sin t) \cdot 1] dt\end{aligned} \right\} \text{ si fanno}$$

2° modo $\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \iint_{\Omega} (-y \sin x + \cos y) dx dy$

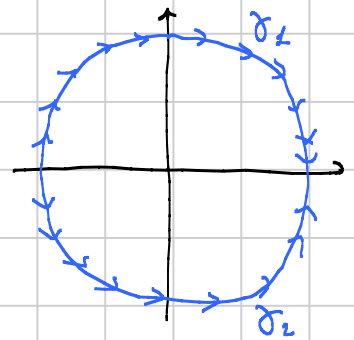
$$= \int_0^\pi dx \int_0^x dy (-y \sin x + \cos y) = \text{si fa}$$

Esempio 4 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$ $\vec{E} = (x^2y, x^{10})$

1° modo Dovrei parametrizzare $\partial\Omega$, il che è spiacevole, perché vengono delle radici

$$\sigma_1(t) = (t, \sqrt[4]{1-t^4}) \text{ con } t \in [-1, 1]$$

$$\sigma_2(t) = (t, -\sqrt[4]{1-t^4}) \text{ con } t \in [-1, 1]$$

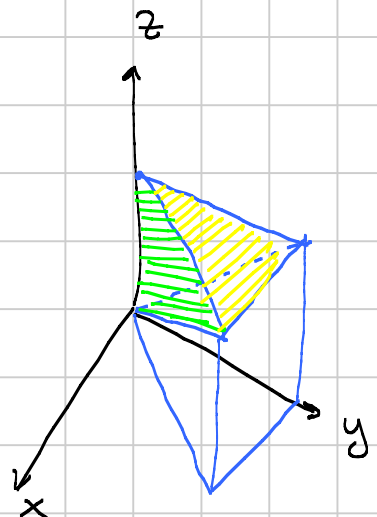
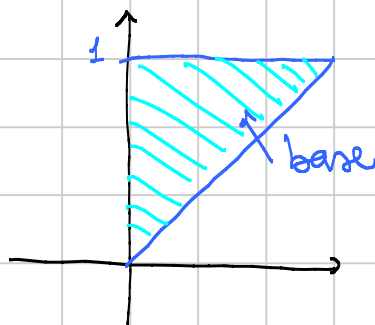


$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\sigma_2} (x^2y dy - x^{10} dx) - \int_{\sigma_1} (x^2y dy - x^{10} dx) = \text{auguri!} \quad \begin{matrix} \text{verso} \\ \text{sbagliato} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{😊} \\ \text{☹️} \end{matrix}$$

2° modo $\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} dx dy$
 $= \iint_{\Omega} 2xy dx dy = 0$ per simmetria 😊

Esempio 5 $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{0 \leq x \leq y}_{\text{base}} \leq \underbrace{z}_{\text{colonna}} \leq 1\}$

$$\vec{E} = (x^2, y^2, z^2)$$



Fissato $(x,y) \in \text{base}$, abbiamo $y \leq z \leq 1$

$\partial\Omega$ è costituito da 3 triangoli, quindi parametrizzarlo è per lo meno lungo (ma un esercizio istruttivo ☺)

In alternativa uso teo. divergenza

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx dy dz = \iiint_{\Omega} (2x+2y+2z) \, dx dy dz \\ &= \int_0^1 dy \int_0^y dx \int_0^1 dz (2x+2y+2z) \end{aligned}$$

Esempio 6 $\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2+y^2 \leq 2 \}$

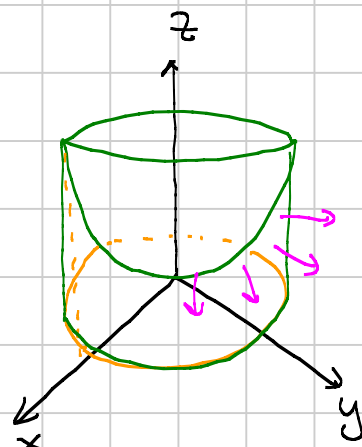
$$\vec{E} = (z + \sin y, \, xyz, \, 1)$$

Ω = p.ti che stanno nel cilindro, ma sotto il paraboloide, quindi il suo bordo è costituito da 3 pezzi

$S_1 \rightarrow$ il cerchio base : $x^2+y^2 \leq 2, z=0$

$S_2 \rightarrow$ la superficie "laterale" : $x^2+y^2=2, z \in [0,2]$

$S_3 \rightarrow$ la superficie "interna" del paraboloide : $z = x^2+y^2 : x^2+y^2 \leq 2$



Via teorema della div : $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx dy dz = \iiint_{\Omega} xz \, dx dy dz = 0$
per simmetria su x

Per esercizio calcoliamo il contributo di S_1

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{S_1} \underset{\substack{\uparrow \\ (0,0,-1)}}{-1} d\sigma = -\operatorname{Area}(S_1) = -2\pi$$

Il contributo di S_2 : $S_2 = (\cos\theta, \sin\theta, z) \quad \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 2]$

Dovrei calcolare M_1, M_2, M_3

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\cos\theta, \sin\theta, 0) \quad \begin{array}{l} \text{giusto che sta} \\ \text{// piano xy} \\ \text{ha il verso} \\ \text{uscite giusto} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dz \left\{ (z + \sin(\sin\theta)) \cos\theta \right. & A.M_1 \\
 &\quad + \cos\theta \sin\theta z \cdot \sin\theta & B.M_2 \\
 &\quad \left. + 0 \right\} & C.M_3 \\
 &= \text{si fa.}
 \end{aligned}$$

Per l'integrale su S_3 la parametrizzazione sarebbe

$(u, v, u^2 + v^2)$ con $(u, v) \in$ cerchio di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-2u, -2v, 1)$$

↑ punta verso le z positive, e quindi è giusto

$$\begin{aligned}
 \int_{S_3} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \iint_{u^2+v^2 \leq 2} \left\{ (u^2+v^2 + \sin v) (-2u) \right. & A.M_1 \\
 &\quad + uv(u^2+v^2) (-2v) & B.M_2 \\
 &\quad \left. + 1 \cdot 1 \right\} & C.M_3
 \end{aligned}$$

= si fa, e con le simmetrie anche bene.

Controllare che la somma venga 0 !!!!
 — 0 — 0 —