

Esempio 1 $A = [0,1] \times [0,1]$

$$f(x,y) = ye^{xy}$$

1° modo $\int_0^1 dx \int_0^1 dy ye^{xy}$

Devo fare la primitiva di ye^{xy} rispetto alla variabile y . Per parti

$$\int ye^{xy} dy = \underbrace{y}_{F} \underbrace{\frac{e^{xy}}{x}}_G - \int \underbrace{\frac{e^{xy}}{x}}_F \underbrace{dy}_G = \frac{y}{x} e^{xy} - \frac{e^{xy}}{x^2}$$

[Verifica derivando: $\frac{1}{x} e^{xy} + \frac{y}{x} \times e^{xy} - \frac{1}{x} e^{xy}$ 😊]

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{y}{x} e^{xy} - \frac{e^{xy}}{x^2} \right]_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 dx \left\{ \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right\}$$

ora dovrei integrare questo, e posso provare per parti

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_F \cdot \underbrace{e^x}_G dx = \log x \cdot e^x - \int \log x \cdot \underbrace{e^x}_F dx = \text{brutto guaio!}$$

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_F \underbrace{e^x}_G dx = \underbrace{\frac{1}{x} e^x}_{FG} + \int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_F \underbrace{e^x}_G dx$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx &= \frac{1}{x} e^x + \int \frac{e^x}{x^2} dx - \int \frac{e^x}{x^2} + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{x} e^x - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

[Verifica: $\left(\frac{1}{x} e^x - \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} e^x + \frac{1}{x} e^x + \frac{1}{x^2}$ ∴]

$$- \left[\frac{1}{x} e^x - \frac{1}{x} \right]_{x=0}^{x=1} = e - 1 \text{ sembra un problema per } x=0, \text{ MA}$$

$$= \left[\frac{e^x - 1}{x} \right]_{x \rightarrow \infty}^{x=1} = e - 1 - 1 = \boxed{e-2}$$

↑
almeno quando $x \rightarrow \infty$
il limite diventa 1

QUANTA DIFFICOLTÀ !!!

2° modo Impostiamolo nell'altro verso:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx \, y e^{xy} = \int_0^1 dy [e^{xy}]_{x=0}^{x=1} = \int_0^1 dy (e^y - 1)$$

↑
primitiva in x

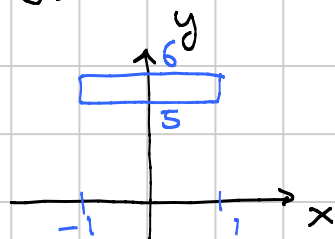
$$= [e^y - y]_{y=0}^{y=1} = e - 1 - 1 = \boxed{e-2}$$

Morale della favola Un integrale può venire in 2 modi, ma con difficoltà molto diverse.

Esempio 2 $A = [-1, 1] \times [5, 6]$ $f(x, y) = xy \cos(x^2 y)$

L'integrale è banalmente nullo !!

- $f(-x, y) = -f(x, y)$ (Dispari in x)
- insieme simmetrico rispetto asse y
(A non cambia se muto x con -x)



Esempio 3 $A = [0, 1] \times [0, \pi]$ $f(x, y) = xy \cos(x^2 y)$

1° modo $\int_0^1 dx \int_0^\pi dy \, xy \cos(x^2 y)$

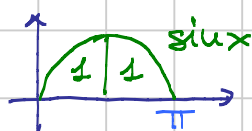
2° modo $\int_0^\pi dy \int_0^1 dx \, xy \cos(x^2 y) = (*)$

Domanda: preferisco fare primitiva in x o y? In x !!!

$$(*) = \int_0^\pi dy \left[\frac{1}{2} \sin(x^2 y) \right]_{x=0}^{x=1} = \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin y \, dy$$

↑
verifica!

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$



Esempio 4 $A = [0, 1] \times [0, 1]$ $f(x, y) = x e^{x^2+y}$

1° modo $\int_0^1 dy \int_0^1 dx \underbrace{x e^{x^2+y}}_{e^{x^2} \cdot e^y} = \int_0^1 e^y dy \int_0^1 x e^{x^2} dx$

$$= \int_0^1 e^y dy \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} (e-1) \int_0^1 e^y dy = \frac{1}{2} (e-1)^2$$

2° modo $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \underbrace{x e^{x^2}}_{\text{facile}} \cdot e^y = \int_0^1 x e^{x^2} dx \int_0^1 e^y dy = \text{facile}$

Esempio 5 $A = [0, 1] \times [-1, 1]$ $f(x, y) = \frac{x}{1+x^2y^2}$

1° modo $\int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy \frac{x}{1+x^2y^2} = \int_0^1 dx [\arctan(xy)]_{y=-1}^{y=1} = 2 \int_0^1 dx \arctan x$

$$= 2 \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_{x=0}^{x=1} = 2 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \right] = \frac{\pi}{2} - \log 2$$

↑ verifica!

2° modo $\int_{-1}^1 dy \int_0^1 dx \frac{x}{1+x^2y^2} = \int_{-1}^1 dy \left[\frac{1}{2y^2} \log(1+x^2y^2) \right]_{x=0}^{x=1}$

↑ verifica!

$$= \int_{-1}^1 dy \frac{\log(1+y^2)}{2y^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{y^2} \log(1+y^2) dy$$

G

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{y} \log(1+y^2) + \int \frac{1}{y} \frac{2y}{1+y^2} dy \right]_{y=-1}^{y=1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{y} \log(1+y^2) + 2 \arctan y \right]_{y=-1}^{y=1} = -\log 2 + \frac{\pi}{4}$$

Osservazione Giustamente il risultato è lo stesso, ma con procedimenti del tutto diversi.

Esempio 6 $A = [0,1] \times [1,2]$

$$f(x,y) = \frac{\log(x+y)}{(x+y)^3}$$

1° modo $\int_0^1 dx \int_1^2 dy \frac{\log(x+y)}{(x+y)^3} = (*)$

In un angolo mi calcolo

$$\int \underbrace{\frac{1}{t^3}}_g \underbrace{\log t}_F = -\frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{t^2}}_G \underbrace{\log t}_F + \int \underbrace{\frac{1}{2}}_G \underbrace{\frac{1}{t^2}}_F \cdot \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{2} \frac{\log t}{t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^3} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\log t}{t^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{t^2} = -\frac{1}{4} \frac{2 \log t + 1}{t^2}$$

Verifica! $-\frac{1}{4} \left[\frac{2 \log t + 1}{t^2} \right]' = -\frac{1}{4} \left(\frac{\cancel{\frac{2}{t}} t^2 - 2t (2 \log t + \cancel{1})}{t^4} \right) = \frac{\log t}{t^3}$ 😊

$$(*) = \int_0^1 dx \left[-\frac{1}{4} \frac{2 \log(x+y) + 1}{(x+y)^2} \right]_{y=1}^{y=2}$$

Forse è + comodo farlo nell'altro verso, almeno se ne va un logaritmo

2° modo $\int_1^2 dy \left[-\frac{1}{4} \frac{2 \log(x+y) + 1}{(x+y)^2} \right]_{x=0}^{x=1}$

$$= -\frac{1}{4} \int_1^2 dy \left\{ \frac{2 \log(y+1) + 1}{(y+1)^2} - \frac{2 \log y + 1}{y^2} \right\}$$

= primitive che si fanno come prima

Esempio 7

$$A = [0,1] \times [0,1]$$

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{1+x^4y^4}$$

1° modo $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{xy^3}{1+x^4y^4} = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{4x^3} \log(1+x^4y^4) \right]_{y=0}^{y=1}$

$\uparrow$ verifica!

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{\log(1+x^4)}{x^3} dx = \text{per parti si fa}$$

2° modo $\int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{xy^3}{1+x^4y^4} = \int_0^1 dy \left[\frac{1}{2} y \arctan(x^2y^2) \right]_{x=0}^{x=1}$

$= \int_0^1 dy \frac{1}{2} y \arctan(y^2)$ e questo per parti si fa.

Controllare che venga lo stesso nei 2 modi, che portano a calcoli completamente diversi.

— o — o —