

Esempio 1 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + z^2 + xy}_{f(x, y, z)} \leq 1\}$ è limitato?

1° modo Completo i quadrati:

$$x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2 + z^2 \leq 1$$

$$(x + \frac{1}{2}y)^2 + z^2 - \frac{1}{4}y^2 \leq 1$$

Scelgo $y = 2t$, $z = t$, $x = -t$ e osservo che sta nell'insieme per ogni valore di t , mentre la sua norma tende a $+\infty$ per $t \rightarrow +\infty$.

In bella copia scrivo: considero $(-t, 2t, t)$. Sostituendo nella relazione data viene $t^2 + t^2 - 2t^2 = 0 \leq 1$.

2° modo Osservo che $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 3t^2 = +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, -3t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t^2 = -\infty$$

FATTO GENERALE (Enunciato e dim. in $\mathbb{R}^2$, ma vale uguale in $\mathbb{R}^3$)

Supponiamo che esista una successione (x_n, y_n) t.c.

$$x_n^2 + y_n^2 \rightarrow +\infty \text{ e } f(x_n, y_n) > 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Supponiamo che esista un'altra $(\hat{x}_n, \hat{y}_n)$ t.c.

$$\hat{x}_n^2 + \hat{y}_n^2 \rightarrow +\infty \text{ e } f(\hat{x}_n, \hat{y}_n) < 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Allora $\mathcal{Q}$ insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{f(x, y)}_{\text{continua}} = 0\} \text{ NON è limitato}$$

Dim. Fissiamo $R > 0$

Fuori dal cerchio trovo un p.to in cui $f > 0$ e un p.to in cui $f < 0$.

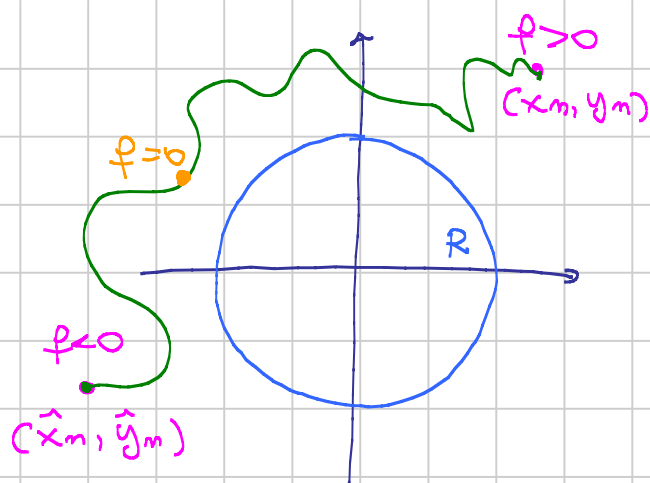
Considero una curva $(x(t), y(t))$ che unisce i 2 p.ti

RIMANENDO FUORI DAL

CERCHIO. La prendiamo con $x(t)$ e $y(t)$ continue.

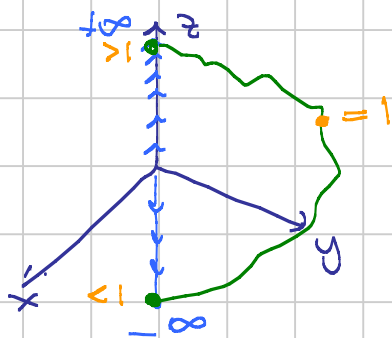
La funzione $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ passa da valori negativi a valori positivi, quindi per analisi 1 si annulla in ALMENO un p.to on the road.

Abbiamo ottenuto un p.to in cui f si annulla fuori dalla palla.



Esempio 2 $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^3 + x + y = 1 \}$
 è limitato? NO!

1° modo Con i limiti $f(0, 0, t) = t^3 \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$
 $\rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow -\infty$



L'insieme A è il grafico della funzione

2° modo Ricavo z : $z = \sqrt[3]{1 - x - y - x^3 - y^3}$

Posso dare a x e y i valori che voglio, anche enormi

Esempio 3 $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y + z = 1, y^2 + z^2 \leq 4 \}$

È limitato!

$x = \sqrt[3]{1 - y - z}$
 questo è limitato

da queste deduciamo che y e z sono limitati

Esempio 4 Limite all'infinito di $x^5 + y^4 + z^4 - xyz$

$$f(t, 0, 0) = t^5 \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty \\ \rightarrow -\infty \text{ per } t \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \text{ il limite non esiste}$$

E se ci limitiamo a $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$? Potrebbe esistere e fare $+\infty$

Osserviamo che $x^5 \geq x^4 - 1$ è vera per ogni $x \geq 0$
(dividere i casi $x \in [0, 1]$ e $x \geq 1$)

Di conseguenza

$$f(x, y, z) \geq x^4 + y^4 + z^4 - xyz$$

Passiamo in coord. sferiche (versione da geografi)

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 - xyz &= \rho^4 (\overbrace{\cos^4 \theta \cos^4 \varphi + \sin^4 \theta \cos^4 \varphi + \sin^4 \theta}^{\geq m > 0}) \\ &\quad - \underbrace{\rho^3 \cdot \text{altra roba trig}}_{\leq 1} \\ &\geq \rho^4 m - \rho^3 = \rho^3 (m\rho - 1) \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Il p.to fondamentale è il solito discorso: la funz. di 2 variabili

$$(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi$$

ammette un minimo in $[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Questo è ≥ 0 ,
e non può essere nullo perché dovrebbero essere nulli
 $\sin \varphi$ e $\cos \varphi$ contemporaneamente.

Oss. Esiste il minimo della $f(x, y, z)$ per $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
e volendo si trova.

Esempio 4 Limite all'infinito di $\frac{x^2 y}{x^6 + y^2 + z^6}$

Poneggiamo gli esponenti ponendo e otteniamo

$$x = u, y = v^3, z = w$$

$$\frac{u^2 v^3}{u^6 + v^6 + w^6}$$

Quando passiamo in sferiche diventa e quindi il limite è 0.

$\frac{\rho^5}{\rho^6}$ ho il solito $u > 0$ per i soliti motivi

Se avessi avuto $\frac{x^3 y}{x^6 + y^2 + z^6}$ il limite non esisteva

Poneggiamo veniva $\frac{u^3 v^3}{u^6 + v^6 + w^6}$ e ora basta usare
" $g(u, v, w)$

$$g(t, 0, 0) \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

$$g(t, t, t) \rightarrow \frac{1}{3} \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

Potevo usare dirett. la funz. iniziale: $f(t, 0, 0)$, $f(t, t^3, t)$

Esempio 5 Limite all'infinito di $x^2 + yz + z^2$

Direi che non esiste

$$f(t, 0, 0) = t^2 \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

$$f(t, -3t, t) = -t^2 \rightarrow -\infty \text{ per } t \rightarrow \pm\infty.$$

• Stessa cosa con $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(t, 0, 0) = t^2 \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty \\ f(0, t, 0) \equiv 0 \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \text{ nemmeno qui esiste}$$

• Stessa cosa $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1$.

Osserviamo che $yz = \frac{1}{x}$ nell'insieme, quindi è come fare

il limite di $x^2 + z^2 + \frac{1}{x}$. Ora possiamo tenere questo limitato e mandare $y \rightarrow +\infty$

$$f\left(1, t, \frac{1}{t}\right) = 1 + 1 + \frac{1}{t^2} \rightarrow 2 \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

e quindi anche in questo caso il limite non esiste.

Esempio 6 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1, x+y = 1\}$
È limitato?

No! Basta forse ricavare: $y = 1-x$, $z = \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-x^2}$

Basta quindi osservare che

$\left(t, 1-t, \frac{1}{t-t^2}\right) \in A$ quando t è abbastanza grande
e la norma di questo vettore
tende all'infinito per $t \rightarrow +\infty$

— o — o —

FINE PARTE DI CALCOLO

DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI.