

Esempio 1 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 + xyz$ $A = \mathbb{R}^3$

$\rightarrow \sup = +\infty$ $f(t, 0, 0) = t^2$ e poi $t \rightarrow +\infty$

Cerco di capire come si comporta all' $+\infty$ (se tendesse a $+\infty$, allora per W. gen...)

Provo un omino che pareggi gli esponenti

$$f(t^3, t^3, t) = 3t^4 + t^5$$

Se mando $t \rightarrow -\infty$ ottengo $\lim = -\infty$

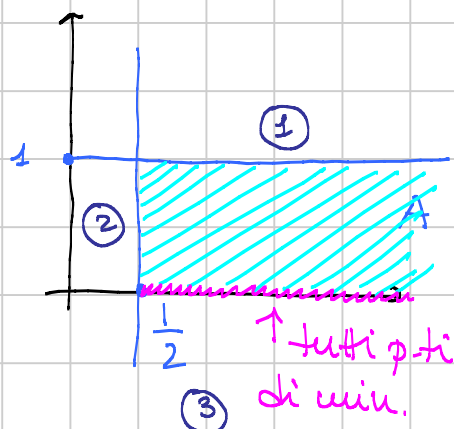
Questo dice 2 cose:

- $\lim$ all' $+\infty$ non esiste
- $\inf = -\infty$ su tutto $\mathbb{R}^3$

Esempio 2 $f(x, y) = \frac{xy^2}{1+x^2+y^2}$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1\}$$

$\rightarrow \sup = \inf = 0$. Infatti



$f(x, y) \geq 0$ in A e vale se e solo se $y = 0$

$\rightarrow$ vediamo se esiste il limite all'infinito

$$\boxed{0} \leq \frac{xy^2}{1+x^2+y^2} \leq \frac{x}{1+x^2+y^2} = \frac{\rho \cos \theta}{1+\rho^2} \leq \frac{\rho}{1+\rho^2}$$

$\downarrow$ 0 in A $\downarrow$ su tutto $\mathbb{R}^2$

$\uparrow$
 solo in A perché disug.
 di destra vale solo in A

→ Dal limite e dall'esistenza di $(x_0, y_0) \in A$ t.c. $f(x_0, y_0) > 0$ segue per W. gen. l'esistenza del max, che può stare nelle solite 3 categorie

• sing. interni : $\emptyset$

• stat. interni :

$$\frac{y^2(1+x^2+y^2) - 2x \cdot xy^2}{(\quad)^2} = 0$$

$$\frac{2xy(1+x^2+y^2) - 2y \cdot xy^2}{(\quad)^2} = 0$$

$$\begin{cases} y^2 + x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 = 0 \\ 2xy + 2x^3y + 2xy^3 - 2xy^3 = 0 \end{cases}$$

$$y^2 + y^4 - x^2y^2 = 0$$

$$xy(1+x^2) = 0$$

$$x=0$$

$$y=0$$

$$x^2 = -1$$

Nulla di interno

NULLA

• Bordo, che è fatto di 3 pezzi

③ Sono tutti p.ti di min

① $(t, 1)$ con $t \geq \frac{1}{2}$ $\varphi_1(t, 1) = \frac{t}{2+t^2}$ che devo studiare per $t \geq \frac{1}{2}$

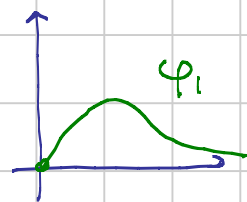
... il p.to di max si calcola

② $(\frac{1}{2}, t)$ con $t \in [0, 1]$:

$$\varphi_2\left(\frac{1}{2}, t\right) = \frac{\frac{1}{2}t^2}{1 + \frac{1}{4} + t^2}$$

e anche questa si studia (ci interessa $t \in [0, 1]$)

(forse è pure crescente: provare!)



La battaglia per il max su A si gioca tra i 2 max sui pezzi ① e ②.

— o — o —

Nota bene: il limite non esisterebbe se fossimo su tutto $\mathbb{R}^2$

$$f(t,0) = t e^{-t} \rightarrow -\infty \text{ per } t \rightarrow -\infty$$

$$f(0,t) = -t e^{-t} \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow -\infty$$

Questo ci dice che su tutto $\mathbb{R}^2$ si ha $\sup = +\infty$ e $\inf = -\infty$.

Back to esempio 4

→ esistono p.ti in A in cui $f > 0$ e p.ti in cui $f < 0$
 $(1,0)$ $(0,1)$

quindi per W. gen. max e min esistono.

• sing. int.: $\emptyset$

• stat. int.: $e^{-(x+y)} + (x-y)(-e^{-(x+y)}) = 0$

$$-e^{-(x+y)} + (x-y)(-e^{-(x+y)}) = 0$$

$$e^{-(x+y)} (1-x+y) = 0$$

$$e^{-(x+y)} (-1-x+y) = 0$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow \text{nessun p.to stazionario}$$

• bordo, che è fatto da 3 pezzi

$$f(t,0) = t e^{-t} \text{ per } t \geq 1 \text{ si studia facilmente}$$

$$f(0,t) = -t e^{-t} \text{ per } t \geq 1 \text{ (uguale a sopra)}$$



arco di circonferenza, che possiamo studiare parametrizzando

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta - \sin\theta) e^{-(\cos\theta + \sin\theta)} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

[Provare !!]

oppure con i moltiplicatori

$$\begin{cases} e^{-(x+y)} (1-x+y) = 2\lambda x & \cdot y \\ e^{-(x+y)} (-1-x+y) = 2\lambda y & \cdot x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

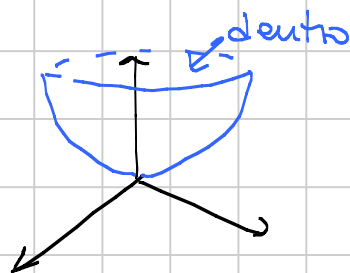
Moltiplico e semplifico e'' e ottengo $y(1-x+y) = x(-1-x+y)$

$$y - xy + y^2 = -x - x^2 + xy \quad \leadsto \quad x^2 + y^2 - 2xy = -(x+y)$$
$$\underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0} = \underbrace{-(x+y)}_{\leq 0 \text{ in } A}$$

L'unica possibilità è $x=y=0$, che non sta in A .

Quindi se la giocano max/min sui 2 tratti rettilinei.

Esempio 5 $f(x, y, z) = x + y + z$
 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2\}$



• $\sup = +\infty$ $f(0, 0, t) = t \rightarrow +\infty$

• Spero che il limite all'infinito faccia $+\infty$ (restando in A)
a quel pto il min esiste. [Morale: in A z comanda!]

Una volta che il min esiste, non è all'interno, quindi è sul bordo e si trova facilmente con i moltiplicatori

Allenamento: z tende a $+\infty$ su A

$$z \geq x^2 + y^2 \text{ ma non basta}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq z + z^2$$

$\uparrow$
in A

Questo dimostra che $z^2 + z \rightarrow +\infty$ in A, da cui è abbastanza intuitivo che $z \rightarrow +\infty$.

Volendo essere + precisi:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq z + z^2 \leq 1 + 2z^2$$

$\uparrow$
 $z \leq z^2 + 1$

da cui

$$z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{2}}$$

$\uparrow$
tende a $+\infty$ su $\mathbb{R}^3$

$\uparrow$
tende a $+\infty$ in A

Qui abbiamo usato che stiamo in A

Caso generale

$$z + x + y = \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + x + y$$

$$\geq \frac{1}{2} \sqrt{\text{roba di prima}} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 + x + y$$

$$\geq \frac{1}{2} \sqrt{\text{roba di prima}} - \text{costante}$$

dove ho usato che $\frac{1}{2} x^2 + x$ e $\frac{1}{2} y^2 + y$ sono limitate dal basso

— o — o —

