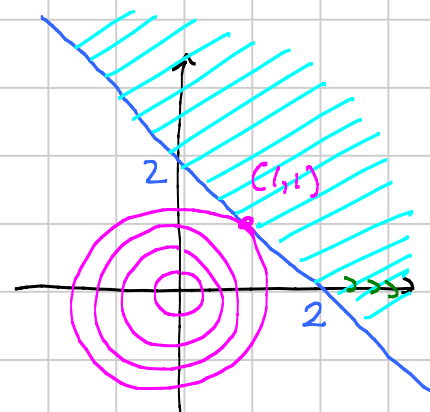


Max-min su insiemi non limitati

Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + y^2$
 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 2\}$



$\rightarrow \sup = +\infty$ $f(t, 0)$ con $t \rightarrow +\infty$
 (per t grande $(t, 0) \in A$)

$\rightarrow$ min esiste per W. generalizzato visto che $f(x, y) \rightarrow +\infty$ per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ (su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi a magg. regione in A)

Gli eventuali p.ti di min:

- sing. o stat. interni (in questo caso NO)
- sul bordo, cioè sulla retta $y = 2 - x$ ← parametrizz. del vincolo
 $\varphi(t) = f(t, 2-t) = t^2 + (2-t)^2 = t^2 + 4 - 4t + t^2 = 2t^2 - 4t + 4$
 $\varphi'(t) = 4t - 4$ si annulla per $t = 1$. Quindi $(1, 1)$ è p.to di min e il valore minimo è 2

Oss. Si vedeva bene con le linee di livello.

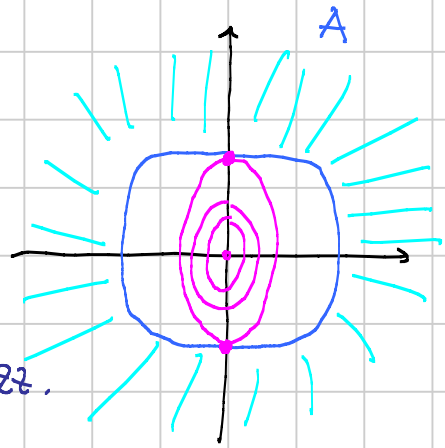
Oss. Si poteva trattare il bordo con i moltiplicatori

$\phi(x, y) = x + y - 2$ 1° sistema $\leadsto$ no soluzione $\nabla \phi = (1, 1)$

2° sistema $\nabla f = \lambda \nabla \phi$ $\left\{ \begin{array}{l} 2x = \lambda \\ 2y = \lambda \\ x + y = 2 \end{array} \right\} \leadsto x = y$ e poi è storia.

— 0 — 0 —

Esempio 2 $f(x,y) = 2x^2 + y^2$
 $A = \{ \dots : x^4 + y^4 \geq 1 \}$



$\rightarrow \sup = +\infty$ $f(t,t)$ con $t \rightarrow +\infty$

$\rightarrow \inf = \min$ e questo esiste per N generalizz.
 (basta fare lim all' ∞ di $f(x,y)$)

Stat. e sing. interni non ci sono $\nabla f = (4x, 2y)$ si annulla solo in $(0,0)$

Quindi il min è sul bordo, che trattiamo con moltiplicatori con
 $\Phi(x,y) = x^4 + y^4 - 1$.

1° sistema $\leadsto$ NO SOL.

2° sistema
$$\begin{cases} 4x = 4\lambda x^3 & \cdot y \\ 2y = 4\lambda y^3 & \cdot 2x \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

$\lambda x^3 y = 2\lambda y^3 x$ $\lambda xy(2y^2 - x^2)$ si aprono 4 opzioni

$\lambda = 0$ $\leadsto$ $x=y=0$ NO BUONO con 3°

$x=0$ $\leadsto$ $(0, \pm 1)$

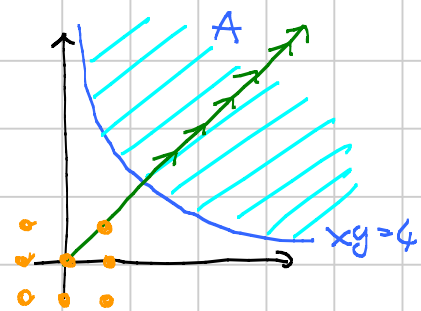
$y=0$ $\leadsto$ $(\pm 1, 0)$

$2y^2 = x^2$ $\leadsto$ $4y^4 = x^4$ $\leadsto$ $5y^4 = 1$ $\leadsto$ $y = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$
 $x = \pm \sqrt[4]{\frac{2}{5}}$ 4 pti

Confrontando i valori di f negli 8 pti trovati abbiamo il minimo. [FARLO!]

L'esame delle linee di livello suggerisce che vincano $(0, \pm 1)$.

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^4 - y^4$
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, xy \geq 4\}$



$\rightarrow \inf = -\infty$ $f(t,t) = 2t^2 - 2t^4$ poi $t \rightarrow +\infty$

$\rightarrow \sup = \max$ che esiste per W.gen. in quanto

$f(x,y) \rightarrow -\infty$ per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$
 (motivo: $f(x,y) \sim \rho^2 - \rho^4$) $\leftarrow$ formalizzare il discorso
 in coord. polari

Ricerca p.ti di max.

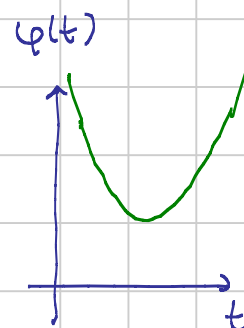
• sing. int. : $\emptyset$

• stat. int. : $2x - 4x^3 = 0$ $x(1 - 2x^2) = 0$ $x = 0$ $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $2y - 4y^3 = 0$ $y = 0$ $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Domanda: quanti sono i p.ti stazionari? Sono 9, ma tutti fuori dall'insieme A.

• bordo, che possiamo trattare in 2 modi

$\rightarrow$ param. $\varphi(t) = f\left(t, \frac{4}{t}\right) = t^2 + \frac{16}{t^2} - t^4 - \frac{256}{t^4}$
 e ora bisogna studiare la funzione per $t > 0$



$\rightarrow$ usare moltiplicatori con $\phi(x,y) = xy - 4$

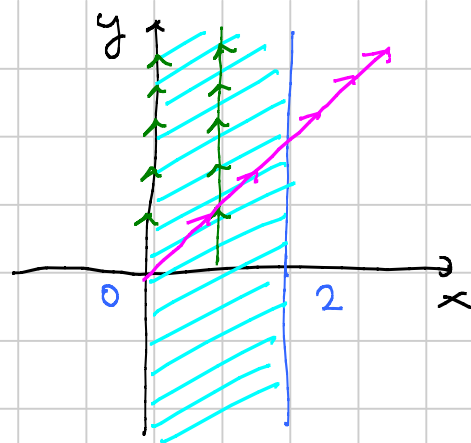
$$\begin{cases} 2x - 4x^3 = \lambda y & \cdot x \\ 2y - 4y^3 = \lambda x & \cdot y \\ xy = 4 \end{cases} \quad \begin{aligned} & 2x^2 - 4x^4 = 2y^2 - 4y^4 \\ & y = \frac{4}{x} \end{aligned} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \text{sostituisco e spero} \\ \text{di saper risolvere} \end{array}$$

Oss. Non ho risolto il 1° sistema, ma non aveva soluzioni

Quando si risolve il 2° sistema, non è davvero necessario trovare il valore di λ , basta trovare i corrispondenti x e y , perché sono loro che vanno sostituiti in f .

Esempio 4

$$f(x,y) = x^2 - 7xy + y^2$$
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2]\}$$
$$= [0,2] \times \mathbb{R}$$



→ $\sup = +\infty$ $f(0,t) = t^2$ con $t \rightarrow +\infty$

Potero anche fare $f(1,t) = t^2 - 7t + 1$
con $t \rightarrow +\infty$

→ Se sapessimo che $f(x,y) \rightarrow +\infty$ per $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$ in A ,
avremmo gratis l'esistenza del min. per W. generalizzato.

Speranza : $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$, ma questo è
FALSO

$$f(t,t) = -5t^2 \rightarrow -\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

Quindi bisogna usare che siamo in A .

$$x^2 - 7xy + y^2 \geq x^2 + y^2 - 14y$$

$\uparrow$
 $x \text{ al max}$
 $\text{è } 2$

$$x^2 - 7xy + y^2 \geq \underbrace{x^2 + y^2 - 14|y|}_{g(x,y)}$$

← Occhio : questa non è
corretta se y è negativo
(prova $x=0$ e $y=-1$)

$$-7xy \geq -7|x| \cdot |y|$$

$$x \leq 2 \Rightarrow |x| \leq 2$$

moltiplico per -7 e inverto

$$-7|x| \geq -14$$

moltiplico per $|y| \geq 0$ e

$$\text{consento } -7|x| \cdot |y| \geq -14|y|$$

Ora $g(x,y) \rightarrow +\infty$ per $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$

su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque a

maggiore ragione in A

(in coord. polari diventa $\rho^2 - 14\rho|\sin\theta| \geq \rho^2 - 14\rho \rightarrow +\infty$)

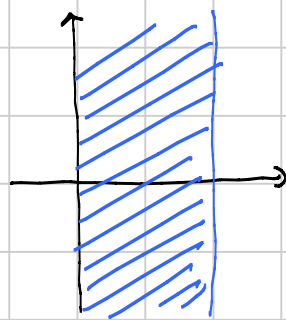
Quindi ho concluso per i carabinieri.

Esempio 5 Sia A come nell'esempio precedente.

Calcolare

$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty}$

$$y^2 - 27xy - x^{2020}$$



$$y^2 - 27xy - x^{2020} = x^2 + y^2 - 27xy - x^{2020} - x^2$$

$$\geq x^2 + y^2 - 54|y| - 2^{2020} - 4$$

quando passiamo in coord.
polari abbiamo ρ^2 contro
roba di grado inferiore,
quindi $\rightarrow +\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$.

— o — o — o —