

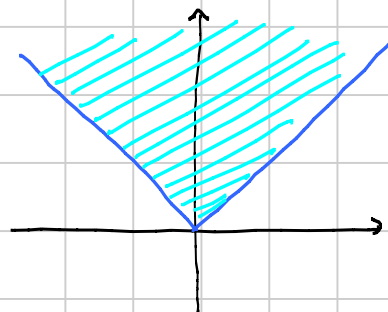
Limiti all'infinito in 2 (o più) variabili

Esempio 1 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{y^6}{1+x^2+y^2}$ NON esiste

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = 0 \quad (\text{semiasse } x \text{ positivo})$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^6}{1+t^2} = +\infty \quad (\text{semiasse } y \text{ positivo})$$

Esempio 2 $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ y \geq |x|}} \frac{y^6}{1+x^2+y^2}$



Idea: ora il limite fa $+\infty$ perché siamo costretti ad usare y "grandi".

1° modo Uso disuguaglianze

$$y^6 \geq y^6$$

$$y^6 \geq x^6$$

per condizione $y \geq |x|$

Sommando: $2y^6 \geq y^6 + x^6$ nella zona data, e quindi

$$\frac{y^6}{1+x^2+y^2} \geq \frac{1}{2} \frac{x^6+y^6}{1+x^2+y^2}$$

Il limite a dx fa $+\infty$ anche su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi a maggior ragione nella zona data. Infatti:

$$\frac{x^6+y^6}{1+x^2+y^2} = \frac{\overbrace{\rho^6 (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)}^{\geq m > 0}}{1+\rho^2} \geq m \frac{\rho^6}{1+\rho^2} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} +\infty$$

2° modo Coordinate polari dall'inizio

$$\frac{y^6}{1+x^2+y^2} = \frac{\rho^6 \sin^6 \theta}{1+\rho^2} \leftarrow \begin{array}{l} \text{ora } \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \\ \text{quindi} \\ \sin \theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \geq \frac{1}{8} \frac{\rho^6}{1+\rho^2}$$

Esempio 3 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(xy)}{|x|+|y|+1} = 0$

Trucco valore assoluto + coord. polari

$$\left| \frac{\arctan(xy)}{1+|x|+|y|} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+|x|+|y|} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\rho(1+|\cos\theta|+|\sin\theta|)} \geq \rho > 0$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\rho}$$

Esempio 4 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^2+y^4 - xy^3$

Esplorazione: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t,0) = +\infty = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(0,t) = +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 + \cancel{t^4} - \cancel{t^4} = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 2t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 + 16t^4 - 8t^4) = +\infty$$

Proviamo sulla retta generica $y = ux$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, ut) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 + u^4 t^4 - u^3 t^4)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \left[1 + \frac{u^3(u-1)}{t^2} \right]$$

negativo se $u \in (0,1)$

Idea! $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, \frac{1}{2}t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 + \frac{1}{16}t^4 - \frac{1}{8}t^4)$

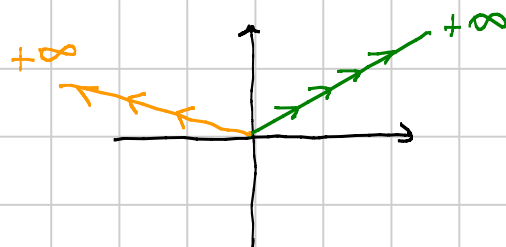
$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 - \frac{1}{16}t^4) = -\infty$$

↑ vince !!

Quindi il limite di partenza NON esiste!

— 0 — 0 —

Esempio 5 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x^4+y^6+x^3y)$



Facciamo il conto sulle rette

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^4 + m^6 t^6 + m t^4) = +\infty$$

→ se $m \neq 0$ domina $m^6 t^6$

→ se $m = 0$, c'è solo t^4

A andare a $+\infty$ su tutte le rette non basta per concludere.

Coord. polari:
$$\begin{aligned} & \rho^4 \cos^4 \theta + \rho^6 \sin^6 \theta + \rho^4 \sin \theta \cos^3 \theta \\ &= \rho^6 \sin^6 \theta + \rho^4 \cos^3 \theta (\cos \theta + \sin \theta) \end{aligned}$$

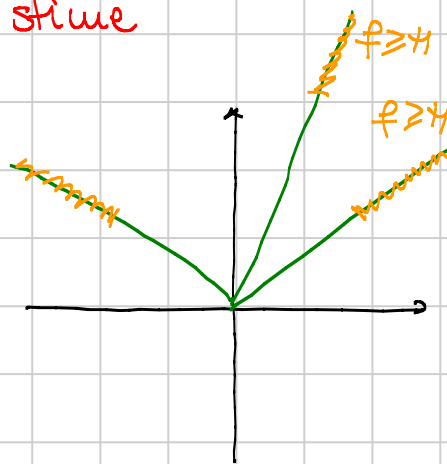
Distinguiamo 2 casi:

→ se $\sin \theta \neq 0$, allora tende a $+\infty$ grazie a $\rho^6 \sin^6 \theta$

→ se $\sin \theta = 0$, allora resta $\rho^4 \cos^4 \theta = \rho^4 \rightarrow +\infty$

Anche questo ragionamento è SPAZZATURA! Pensare θ come un parametro fisso = muoversi sulle rette a θ fisso.

Per avere una dimostrazione occorre trovare stime INDIPENDENTI DA θ .



Geometricamente: fissata una costante M ed una semiretta uscente dall'origine, definitivamente sulla semiretta la funz. diventa $\geq M$.

Mettendo insieme i vari definitivamente, non è detto che si trovi una cond. del tipo $x^2+y^2 \geq r^2$. Ci vorrebbe un r che va bene per tutti i θ !!!

Come uscire?

SLOGAN: pareggiare gli esponenti!!!

$x^4 + y^6 + x^3 y$. Poniamo $x = u^3$ e $y = v^2$. Allora vale

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = \lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} f(u^3, v^2)$$

convincersene
con calma

$$\lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} f(u^3, v^2) = \lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} u^{12} + v^{12} + u^3 v^2$$

Questo in coord. polari diventa

$$\rho^{12} \underbrace{(\cos^{12} \theta + \sin^{12} \theta)}_{\geq m > 0} + \rho^{11} \underbrace{(\cos^9 \theta \sin^2 \theta)}_{\geq -1} \geq \underbrace{m \rho^{12} - \rho^{11}}_{\downarrow +\infty}$$

Questo mostra che il limite originario è $+\infty$!!!

Oss. La dimostrazione fatta in realtà copre solo gli $y \geq 0$.

Bisognerebbe fare a parte il caso $y \leq 0$ ponendo $y = -v^2$.
Alla fine i conti sono gli stessi!

Esempio 6 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x^4 + y^6 + xy^5)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^4 = +\infty, \text{ quindi se esiste il limite è } +\infty.$$

Paragoniamo gli esponenti: $x = u^3, y = v^2$

$$x^4 + y^6 + xy^5 = u^{12} + v^{12} + u^3 v^{10}$$

C'è il rischio che comandi
il secondo termine!!!

Basta scegliere $u = t$ e $v = t$ e poi mandare $t \rightarrow -\infty$

Si poteva fare direttamente

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t^3, t^2) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (t^{12} + t^{12} + t^{13}) = -\infty$$

↑ comanda questo!!

Si poteva vedere ragionando sulle rette?

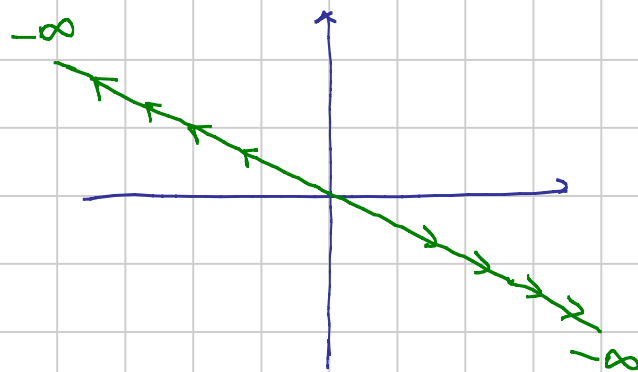
$$f(t, ut) = t^4 + u^6 t^6 + u^5 t^6 = t^4 + t^6 u^5 (u+1)$$

negativo per $u \in (-1, 0)$
quindi ad esempio
per $u = -\frac{1}{2}$

Domanda: come sarebbe stato
il limite sul solo
1° quadrante?

Sarebbe stato $+\infty$!!!

Motivo: $x^4 + y^6 + xy^5 \geq x^4 + y^6$
↑
sul 1° quadrante



e il limite a dx fa $+\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Come vederlo?

→ paraggio esponenti e passo in coord. polari

→ Uso disug. del tipo $x^4 \geq x^2 - 1$ e $y^6 \geq y^2 - 1$
(facile analisi 1)

da cui

$$x^4 + y^6 \geq \boxed{x^2 + y^2 - 2}$$

↓
 $+\infty$

— o — o —