

Più moltiplicatori di Lagrange (Vedi Lezione 11 di AM2-14)

Esempio 1 $f(x, y, z) = xy$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, x^2 + z^2 = 1\}$$

il vincolo è descritto da 2 equazioni

Step 1 Mostriamo che A è compatto (a quel p.to $W \Rightarrow$ esistono max e min). Chiuso segue dall'avere condizioni $\geq, \leq, =$.
Mi interessa limitato.

Dalla 1^a equ. deduciamo $|x| \leq \sqrt{2}$ e $|y| \leq \sqrt{2}$. Dalla 2^a: $|z| \leq 1$.
Quindi A è contenuto in un parallelepipedo, quindi ok.

Step 2 Staz. interni e sing int. non hanno senso, perché A è "solo bordo".

Step 3 Usiamo il metodo con $\Phi_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2$
 $\Phi_2(x, y) = x^2 + z^2 - 1$

1° sistema $\begin{cases} \text{rank} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & -2z \end{pmatrix} \leq 1 \\ \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow 3 \text{ equazioni}$

$\begin{matrix} \text{[Dopo video]} \rightsquigarrow yz=0 & xz=0 & xy=0 \end{matrix}$

$yz=0 \rightarrow \begin{matrix} y=0 \xrightarrow{\Phi_1} x=\pm\sqrt{2} \xrightarrow{xz=0} z=0 \xrightarrow{\Phi_2} x=\pm 1 \end{matrix}$ ☹️

$\rightarrow z=0 \xrightarrow{\Phi_2} x=\pm 1 \xrightarrow{xy=0} y=0 \xrightarrow{\Phi_1} x=\pm\sqrt{2}$ ☹️

2° sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla \phi_1 + \mu \nabla \phi_2 \\ \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2\lambda x + 2\mu x \\ x = 2\lambda y \\ 0 = -2\mu z \\ x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

[Dopo video]

$\mu z = 0$

↙ $\mu = 0$ ↘ $z = 0$

↙ $1^a \text{ e } 2^a \text{ eq.}$ ↘ 5^a eq.

$2\lambda x^2 = 2\lambda y^2$
 $\lambda(x^2 - y^2) = 0$

↙ $x = \pm y$ ↘ $\lambda = 0$

↙ 4^a ↘ $1^a \text{ e } 2^a$

$x = \pm 1$
 $y = \pm 1$
↘ 5^a
 $z = 0$

$x = y = 0$
↘ 4^a


$(\pm 1, \pm 1, 0)$ 4 p.ti

Conclusione: abbiamo 4 candidati

p.ti di max

→ $f(1, 1, 0) = f(-1, -1, 0) = 1 \leftarrow \text{max}$

$f(-1, 1, 0) = f(1, -1, 0) = -1 \leftarrow \text{min}$

p.ti di min

Esempio 2

$$f(x, y, z) = xy$$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, x^2 + z^2 = 1, z \geq \frac{1}{2}\}$$

Compattezza come prima, quindi max/min esistono.

Però tutti i candidati non vanno bene !!!

La condizione aggiunta crea dei "pti di taglio", o "bordi dei bordi" descritti da $x^2 + y^2 = 2, x^2 + z^2 = 1, z = \frac{1}{2}$

Le cond. danno un numero finito di p.ti

$$x^2 = \frac{3}{4} \leadsto y^2 = \frac{5}{4} \leadsto \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad 4 \text{ p.ti}$$

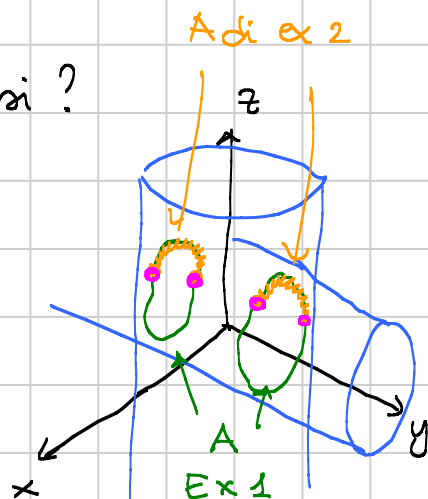
$$\text{Max} = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{min} = f\left(-, +, \frac{1}{2}\right) = f\left(+, -, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

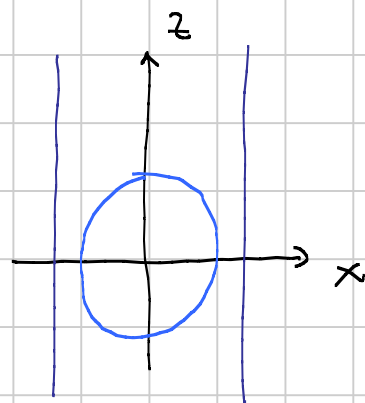
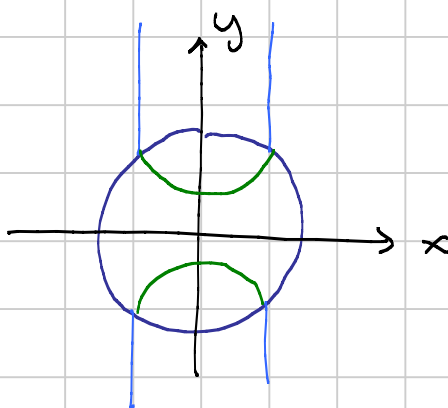
Oss. geom. Come è fatto $\mathcal{A}$ insieme nei 2 casi?

$$x^2 + y^2 = 2 \leadsto \text{cilindro con asse lungo asse } z \text{ e raggio } \sqrt{2}$$

$$x^2 + z^2 = 1 \leadsto \text{cilindro con asse lungo asse } y \text{ e raggio } 1$$



Visto dall'alto



Esempio 3 $f(x, y, z) = x - y + z^2$

$$\mathcal{A} = \{ \dots : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}}_{\text{sfera } \Phi_1}, \underbrace{x + y = z^2}_{\text{grafico } \Phi_2} \}$$

Step 1 e 2 come prima

Moltiplicatori

1° sistema

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 2z \end{pmatrix}$$

rank ≤ 1

$$4yz - 2z = 0$$

$$z(2y - 1) = 0$$

$$4xz - 2z = 0$$

$$z(2x - 1) = 0$$

$$2x - 2y = 0$$

$$x = y$$

$$z(2x-1)=0 \begin{cases} \xrightarrow{\Phi_2} z=0 \leadsto y=-x \leadsto x=\pm \frac{1}{2}, y=\mp \frac{1}{2} \leadsto \text{No buoni con } x=y \\ \xrightarrow{\Phi_1} x=\frac{1}{2}=y \leadsto z=0 \leadsto \text{incompatibile con } \Phi_2 \end{cases}$$

$$\boxed{2^{\text{o}} \text{ Sistema}} \begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu \\ -1 = 2\lambda y + \mu \\ 2z = 2\lambda z + 2\mu z \\ \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \end{cases}$$

$$3^{\text{a}} \text{ equ: } z(\lambda + \mu - 1) = 0$$

$$\begin{cases} z=0 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \downarrow \begin{matrix} x=\pm \frac{1}{2}, y=\mp \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)} \text{ e } \boxed{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)}$$

$$\lambda + \mu = 1 \leadsto \mu = 1 - \lambda \leadsto \begin{cases} 1 = 2\lambda x + 1 - \lambda \\ -1 = 2\lambda y + 1 - \lambda \end{cases}$$

$$\lambda(2x-1)=0$$

$$\begin{cases} \downarrow x=\frac{1}{2} \\ \downarrow \Phi_2 \\ y = z^2 - \frac{1}{2} \\ \downarrow \Phi_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rightarrow \lambda=0 \\ \downarrow \text{incomp. con } 2^{\text{a}} \end{matrix}$$

$$\frac{1}{4} + \left(z^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{2}$$

$$\downarrow z=0$$

quindi ancora una volta
 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

$$\cancel{\frac{1}{4}} + z^4 + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{z^2} + z^2 = \cancel{\frac{1}{2}}$$

Sostituendo saranno p.to di max e p.to di min.

Oss. Potero semplificare il conto osservando che in A vale $z^2 = x+y$ quindi $f(x, y, z) = x - y + z^2 = 2x$. Questo semplificava il 2° sistema

$$2 = 2\lambda x + \mu$$

$$0 = 2\lambda y + \mu$$

$$0 = 2\lambda z + 2\mu z$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0$$

Questo può essere più facile da risolvere.

— o — o —