

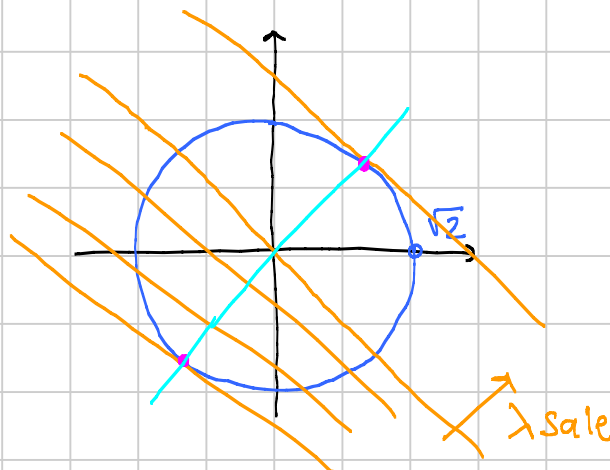
Max / min di funzioni con valori assoluti

Strategia generale : $\rightarrow$ studio il problema senza val. assoluto
 $\rightarrow$ cerco di concludere

Esempio 1 $f(x,y) = |x+y-5|$
 $x^2+y^2 \leq 2 \leftarrow$ insieme

Studio max / min di $x+y-5$

$W \Rightarrow$ max / min esistono



Linee di livello : $x+y-5 = \lambda \leadsto x+y = 5+\lambda$

Conclusioni: p.to di max : $(1,1)$ e $\max = -3$
 p.to di min : $(-1,-1)$ e $\min = -7$

Sappiamo che $x+y-5$ è negativa in tutto A , quindi fare il valore assoluto vuol dire cambiare segno.

Quando cambio segno, max e min si invertono, dunque per $|x+y-5|$ avremo

p.to di max : $(-1,-1)$ e $\max = 7$

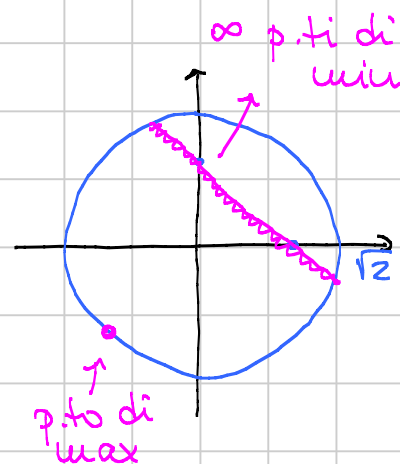
p.to di min : $(1,1)$ e $\min = 3$

Esempio 2 $f(x,y) = |x+y-1|$
 $A =$ come prima

Se studio $g(x,y) = x+y-1$, avremo

$\rightarrow$ p.to di max : $(1,1)$ e $\max = 1$

$\rightarrow$ p.to di min : $(-1,-1)$ e $\min = -3$



Cosa succede facendo il val. assoluto?

→ Per il max se la giocano il vecchio max (cioè 1) e il vecchio min. cambiato di segno (cioè 3)

→ Il minimo è per forza 0

Conclusioni: → max = 3, p.to di max: (-1, -1)

→ min = 0 e ci sono infiniti p.ti di min., cioè tutti i p.ti della retta $x+y=1$ che stanno in A.

Esempio 3 $f(x,y) = |x - e^y|$
 $A = [0,1] \times [-1,1]$

Studiamo $g(x,y) = x - e^y$

$$g(x,y) = x - e^y \leq 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

↑
con = se e solo se $x=1$ e $y=-1$

$$g(x,y) = x - e^y \geq 0 - e = -e$$

↑
= se e solo se $x=0$ e $y=1$

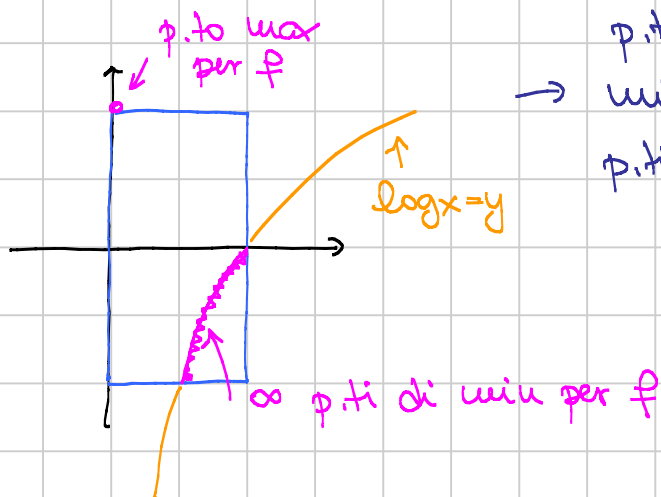
Conclusioni per $g(x,y)$: → p.to di max: (1, -1) e max = $1 - \frac{1}{e} > 0$

→ " " min: (0, 1) e min = $-e$

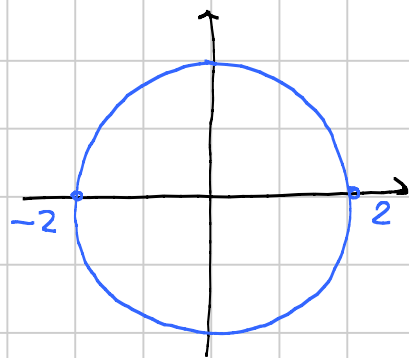
Conclusioni per $f(x,y)$: → max = e (vecchio min con segno invert.)

p.to di max = (0, 1)

→ min = 0 e p.ti di min sono i p.ti di A t.c. $x = e^y$



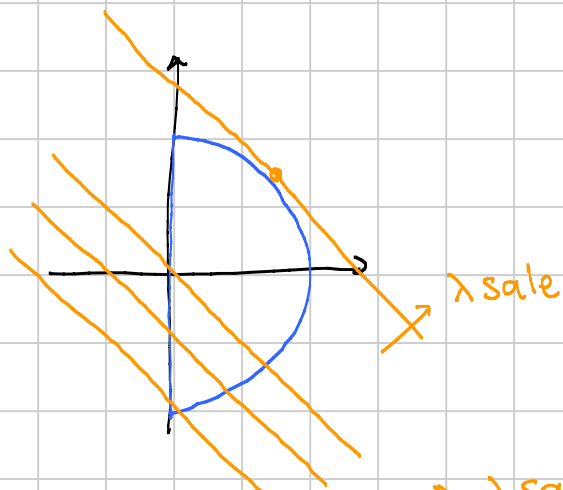
Esempio 3 $f(x,y) = |x| + y$
 Insieme: $x^2 + y^2 \leq 4$



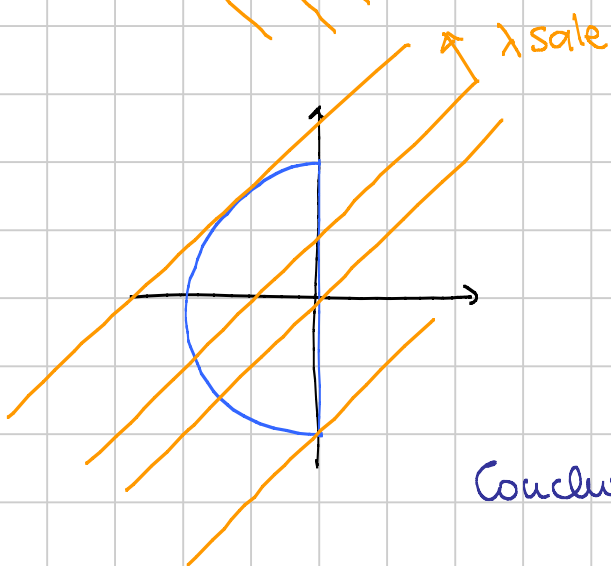
Achtung! Il valore assoluto non coinvolge tutta la funzione,
 QUINDI DEVO DIVIDERE I CASI.

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{dove } x \geq 0 \\ -x+y & \text{dove } y \leq 0 \end{cases}$$

Quindi devo studiare $x+y$ nel semicerchio a dx
 " " $-x+y$ nel " " sx



$$\begin{aligned} \max &= 2\sqrt{2} & \text{p.to di max: } (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ \min &= -2 & \text{p.to di min: } (0, -2) \end{aligned}$$



$$-x+y = \lambda \quad y = x+\lambda$$

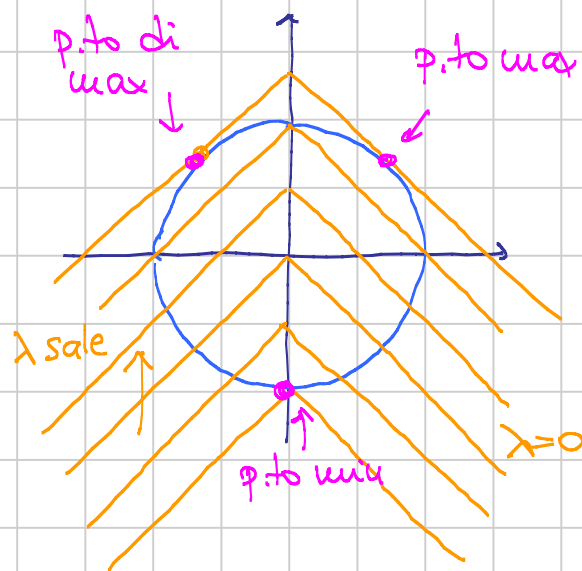
$$\begin{aligned} \max &= 2\sqrt{2} & \text{p.to di max: } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ \min &= -2 & \text{p.to di min: } (0, -2) \end{aligned}$$

Conclusione per funzione globale

$$\rightarrow \max = 2\sqrt{2} \quad \text{p.ti di max: } (\pm\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\rightarrow \min = -2 \quad \text{p.ti di min: } (0, -2)$$

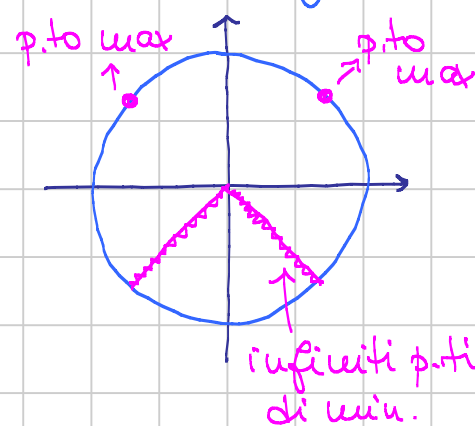
Metodo alternativo Fare direttamente
 le linee di livello $f(x,y) = \lambda$
 $|x| + y = \lambda \rightsquigarrow y = -|x| + \lambda$



Esempio 4 Stesso A di prima
 $f(x,y) = ||x| + y|$

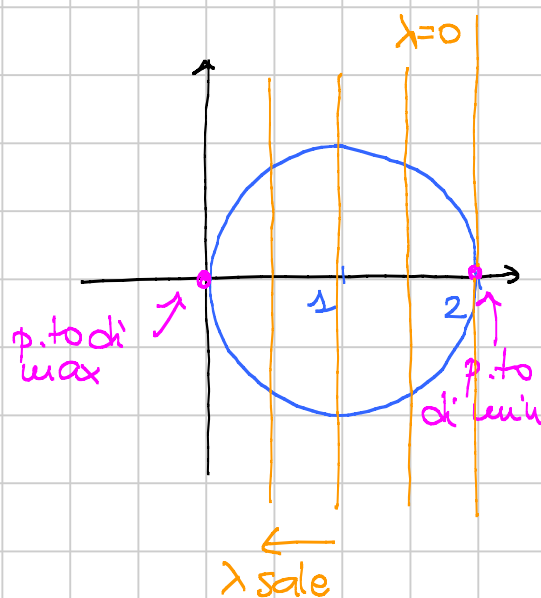
Si tratta di prendere la funzione di prima e ribaltare le
 parti negative

→ max: $2\sqrt{2}$ (il vecchio max batte il vecchio min con segno camb)
 p.ti di max: $(\pm\sqrt{2}, \sqrt{2})$
 → min: infiniti p.ti di A in cui $y = -|x|$



Esempio 5 $f(x,y) = |x-2|$
 Insieme: $x^2 + y^2 \leq 2x$
 $x^2 + y^2 - 2x + 1 \leq 1$
 $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$

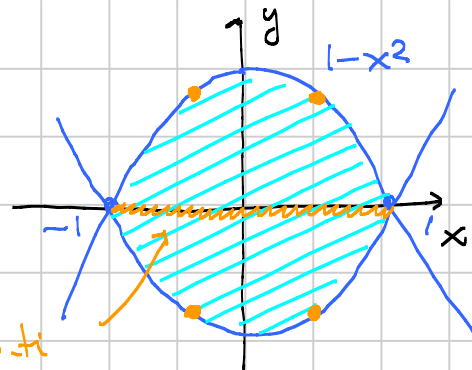
Osserviamo che $x-2 \leq 0$ in A,
 per cui $|x-2| = 2-x$
 Quindi si tratta di fare
 max/min di $2-x$



Esempio 6 $f(x,y) = xy^2$
 Insieme: $x^2 + |y| \leq 1$

Per $y \geq 0$ diventa $x^2 + y \leq 1$, cioè
 $y \leq 1 - x^2$

Osservo che si ha simmetria
 rispetto all'asse x



∞ p.ti
 staz. interni
 dove $f=0$ e quindi
 sono p.ti di min

Step 1 $W \Rightarrow$ max e min esistono

Step 2 Sing int.: $\emptyset$ Staz int $\begin{cases} y^2 = 0 \leadsto y = 0 \\ 2xy = 0 \quad \times \text{ QUALUNQUE} \end{cases}$

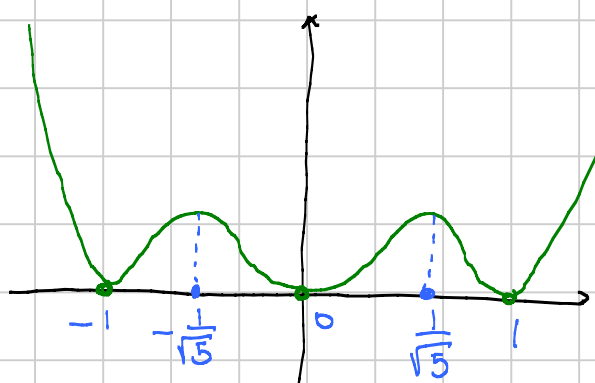
Step 3 Bordo fatto da 2 pezzi di parabola. Qui a scelta possiamo parametrizzare o usare moltiplicatori.

Pezzo alto: $(t, 1-t^2) : t \in [-1, 1] \leadsto \varphi(t) = t(1-t^2)^2$ che devo studiare per $t \in [-1, 1]$

Pezzo basso: $(t, t^2-1) : t \in [-1, 1] \leadsto$ stessa funzione di sopra

$$\varphi(t) = t(t^2-1)^2 \quad \varphi'(t) = (t^2-1)^2 + t \cdot 2(t^2-1) \cdot 2t \\ = (t^2-1)(t^2-1+4t^2)$$

$$\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1 \text{ oppure } 5t^2 = 1, \text{ cioè } t = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$



[Dopo video: il grafico è corretto per $x \geq 0$ ma
 ribaltato per $x < 0$ (φ è dispari). Questo cambia
 i corrispondenti p.ti e conclusioni]

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{4}{5} \right)$$

sono 4 p.ti di max.

[Ex: interpretare con linee di livello $xy^2 = \lambda \quad y = \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{x}}$]