

A.A. 2019/2020
Modulo di Analisi Matematica 2
Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 01. Esercizi su insiemi del piano descritti mediante disequazioni.	6
Lezione 02. Esercizi su insiemi del piano descritti mediante disequazioni.	10
Lezione 03. Visualizzazione di grafici di funzioni di due variabili: linee di livello e restrizioni a curve.	15
Lezione 04. Primi esempi sul calcolo di limiti nell'origine per funzioni di due variabili.	19
Lezione 05. Ulteriori esempi sul calcolo di limiti nell'origine per funzioni di due variabili.	24
Lezione 06. Esercizi su derivate parziali, derivate direzionali, gradiente e differenziale per funzioni di più variabili. Relazione geometrica tra gradiente e linee di livello. .	28
Lezione 07. Primi esempi di problemi di max/min in più variabili risolti mediante disuguaglianze elementari e/o guardando le linee di livello.	33
Lezione 08. Esempi di problemi di min/max risolti mediante parametrizzazione del bordo.	38
Lezione 09. Descrizione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange: caso di un solo moltiplicatore. Esempi di problemi di min/max risolti mediante questo metodo. .	43
Lezione 10. Ulteriori esempi di problemi di min/max risolti mediante un moltiplicatore di Lagrange. Esempio di utilizzo misto di moltiplicatori e parametrizzazioni. Punti di taglio (bordi dei bordi).	48
Lezione 11. Esempi di studio di problemi di min/max con valori assoluti.	52
Lezione 12. Problemi di min/max in sottoinsiemi compatti dello spazio. Risoluzione mediante un moltiplicatore di Lagrange e studio a parte dei punti di taglio.	57
Lezione 13. Problemi di min/max risolti con due moltiplicatori di Lagrange.	62
Lezione 14. Primi esempi di limiti all'infinito per funzioni di due variabili.	66
Lezione 15. Ulteriori esempi di limiti all'infinito per funzioni di due variabili.	71
Lezione 16. Primo esempi di problemi di min/max su sottoinsiemi non limitati del piano.	76
Lezione 17. Ulteriori esempi di problemi di min/max su sottoinsiemi non limitati del piano.	82

Lezione 18. Esempi di problemi di min/max su sottoinsiemi non limitati del piano e dello spazio.	87
Lezione 19. Polinomi di Taylor per funzioni di più variabili.	93
Lezione 20. Studio locale per funzioni di più variabili.	98
Lezione 21. Matrice Hessiana e classificazione di punti stazionari per funzioni di più variabili.	104
Lezione 22. Esempi di studio di funzioni di più variabili.	110
Lezione 23. Esempi finali relativi al calcolo differenziale per funzioni di più variabili. .	114
Lezione 24. Primi esempi di integrali doppi su rettangoli. Utilizzo di simmetrie nel calcolo di integrali doppi.	119
Lezione 25. Ulteriori esempi di integrali doppi su rettangoli e di utilizzo delle simmetrie.	124
Lezione 26. Esempi di scrittura di sottoinsiemi del piano come insiemi come normali rispetto all'asse x e/o rispetto all'asse y	129
Lezione 27. Calcolo di integrali doppi su insiemi normali. Utilizzo delle simmetrie in questo contesto.	134
Lezione 28. Calcolo di integrali doppi con valori assoluti: spezzamento del dominio, scrittura come somma o differenza.	139
Lezione 29. Utilizzo delle coordinate polari per il calcolo di integrali doppi.	144
Lezione 30. Utilizzo di cambi di variabili per il calcolo di integrali doppi. Calcolo del determinante jacobiano.	149
Lezione 31. Primi esempi di calcolo di integrali tripli: formula di riduzione sui rettangoli, per colonne e per sezioni.	154
Lezione 32. Ulteriori esempi di calcolo di integrali tripli per sezioni e per colonne. . .	158
Lezione 33. Utilizzo delle coordinate sferiche e delle simmetrie nel calcolo di integrali tripli.	163
Lezione 34. Integrali tripli calcolati mediante cambi di variabile.	168
Lezione 35. Esercizi di ricapitolazione sugli integrali tripli.	173
Lezione 36. Utilizzo non standard delle coordinate polari nel calcolo di integrali doppi. Integrali tripli su tetraedri.	177
Lezione 37. Esercizi delicati sul calcolo di integrali tripli.	182
Lezione 38. Calcolo di volumi, baricentri e momenti d'inerzia mediante integrali doppi e tripli.	187

Lezione 39. Curve nel piano: chiusura, semplicità, retta tangente in un punto, disegno del supporto.	192
Lezione 40. Esercizi sulle curve nel piano: semplicità e disegno del supporto.	197
Lezione 41. Forme differenziali: esattezza, chiusura, primitiva.	202
Lezione 42. Quattro strategie per il calcolo dell'integrale di una forma differenziale lungo una curva.	207
Lezione 43. Esercizi sull'integrale di forme differenziali lungo curve. Esempio di forma differenziale chiusa ma non esatta.	212
Lezione 44. Lunghezza di una curva, integrale curvilineo, baricentro di una curva. Lunghezza di una curva data come grafico, in coordinate polari e coordinate sferiche.	217
Lezione 45. Area di una superficie e integrali superficiali.	222
Lezione 46. Solidi di rotazione: volume ed area della superficie.	228
Lezione 47. Esercizi sui solidi di rotazione, con calcolo di baricentri. Rotazioni incomplete.	233
Lezione 48. Gradiente, divergenza, rotore, Laplaciano. Esempio di inversione del rotore.	238
Lezione 49. Calcolo dell'area di domini due dimensionali descritti mediante il loro bordo.	243
Lezione 50. Calcolo del flusso di un vettore uscente da un insieme, in due e tre dimensioni.	248
Lezione 51. Utilizzo del teorema della divergenza per calcolare l'integrale di funzioni su insiemi del piano descritti mediante il loro bordo.	254
Lezione 52. Utilizzo del teorema della divergenza per calcolare l'integrale di funzioni su insiemi dello spazio descritti mediante il loro bordo.. . . .	259
Lezione 53. Quattro strategie per il calcolo del flusso di un vettore attraverso una superficie.	264
Lezione 54. Esercizi sul calcolo del flusso di un vettore attraverso una superficie. . . .	269
Lezione 55. Ulteriori esercizi sul calcolo del flusso di un vettore attraverso una superficie.	274
Lezione 56. Primi esempi di studio di integrali impropri in due dimensioni.	279
Lezione 57. Integrale Gaussiano. Ulteriori esempi di studio della convergenza di integrali impropri su sottoinsiemi del piano.	285
Lezione 58. Utilizzo di cambi di variabile per lo studio di integrali impropri.	290
Lezione 59. Integrali impropri con parametri, nel piano e nello spazio.	295
Lezione 60. Esempi finali di studio della convergenza di integrali impropri.	300

ANALISI 2

LEZIONE 01

[In differita per emergenza COVID-19]

Note Title

03/03/2020

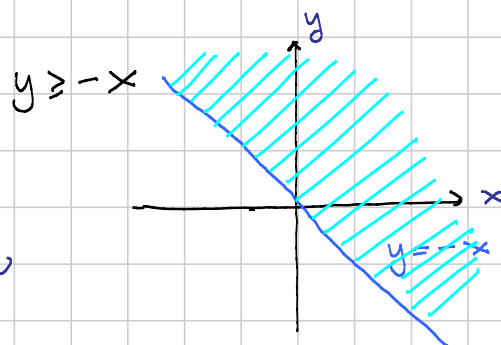
DISEGNO DI INSIEMI DEL PIANO

[PREREQUISITI: precorso]

Disegnare sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ descritti da equazioni e/o disequazioni.

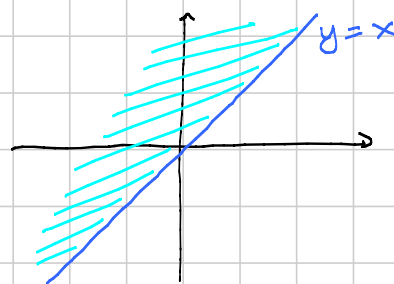
$$\textcircled{1} \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x+y}_{\text{p.ti del piano}} \geq \underbrace{0}_{\text{condizione}} \}$$

P.ti che stanno "sopra" la retta $y = -x$,
retta compresa (c'è $\geq$)



$$\textcircled{2} \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y \leq 0 \} \quad \rightarrow \quad y \geq x$$

P.ti "sopra" retta $y = x$



$$\textcircled{3} \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x+y \leq 5 \}$$

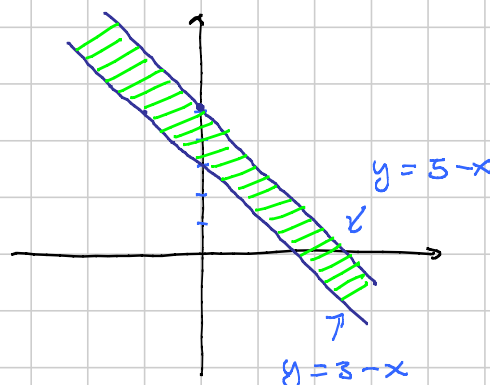
Due condizioni

$$3 \leq x+y \quad y \geq -x+3$$

$$x+y \leq 5 \quad y \leq -x+5$$

che devono essere vere ENTRAMBE

P.ti della striscia compresa tra 2 rette

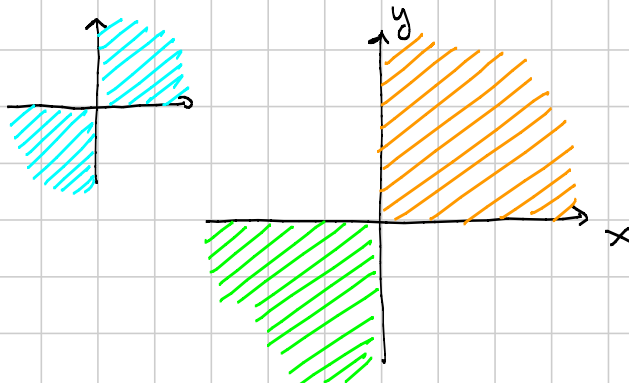


④ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

Due casi

- $x \geq 0$ e $y \geq 0$ ●
- $x \leq 0$ e $y \leq 0$ ●

Unione di 1° e 3° quadrante



⑤ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x \geq 0\}$

Non pensare nemmeno: p.ti che stanno sopra / sotto una parabola

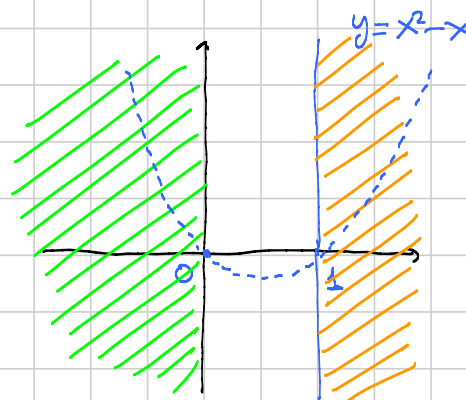
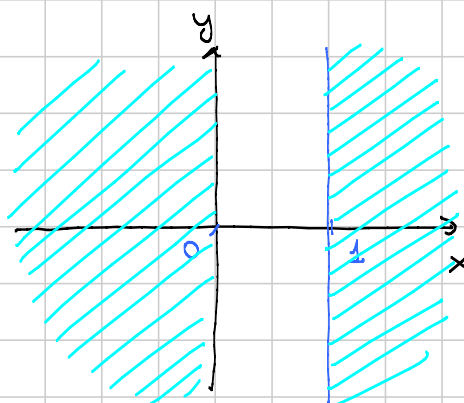
$x(x-1) \geq 0$ soddisfatta per valori esterni all'intervallo delle

radici: $x=0$ e $x=1$

$x \leq 0$ oppure $x \geq 1$

$x(x-1) \geq 0$ ci sono 2 casi

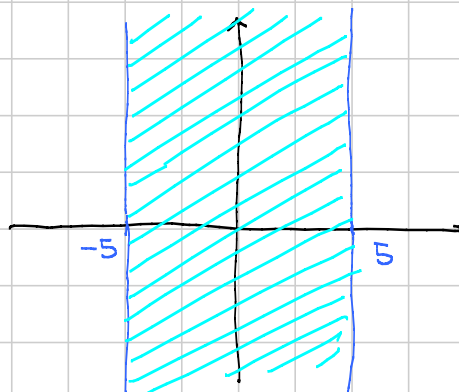
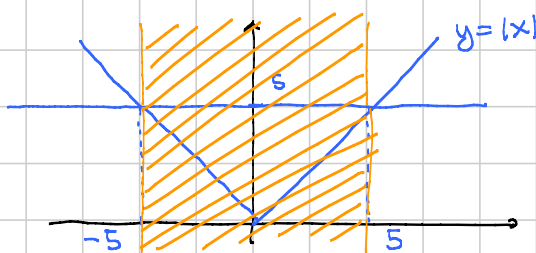
- $x \geq 0$ e $x-1 \geq 0 \rightsquigarrow x \geq 1$ ●
- $x \leq 0$ e $x-1 \leq 0 \rightsquigarrow x \leq 0$ ●



⑥ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 5\}$

$|x| \leq 5$ vuol dire

$$-5 \leq x \leq 5$$



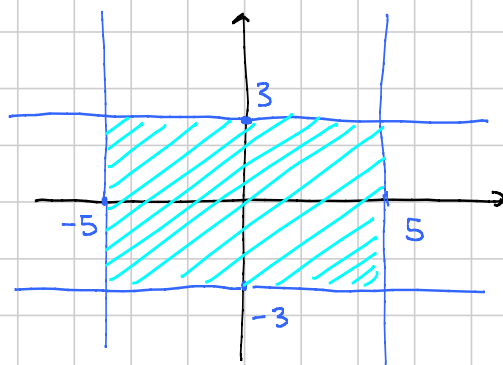
$$\textcircled{7} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 5, |y| \leq 3 \}$$

Le due condizioni devono essere
vere ENTRAMBE

$$\bullet |x| \leq 5 \quad -5 \leq x \leq 5$$

$$\bullet |y| \leq 3 \quad -3 \leq y \leq 3$$

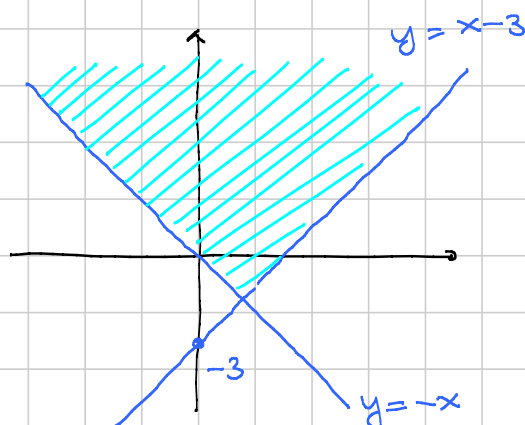
Rettagolo!



$$\textcircled{8} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0, x-y \leq 3 \}$$

$$y \geq -x \quad y \geq x-3$$

Intersezione dei due semipiani
= zona sopra ad entrambe
le rette



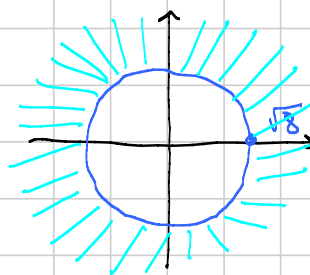
Se volevo la zona "sinistra" le condizioni sarebbero state

$$y \geq x-3 \quad \text{e} \quad y \leq -x$$

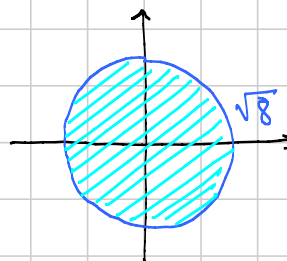
che si possono scrivere come $x-y \leq 3$, $x+y \leq 0$.

$$\textcircled{9} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 8 \}$$

Distanza dall'origine $\geq \sqrt{8}$



$$\textcircled{10} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 8 \}$$



Varianti speciali

$$x^2 + y^2 \geq 0 \quad \rightsquigarrow \text{tutto il piano}$$

$$x^2 + y^2 \leq 0 \quad \rightsquigarrow \text{solo l'origine } (0,0) \quad (\text{e non l'insieme vuoto})$$

$$x^2 + y^2 < 0 \quad \text{oppure} \quad x^2 + y^2 \leq -3 \quad \rightsquigarrow \emptyset$$

$$\textcircled{11} \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 0 \}$$

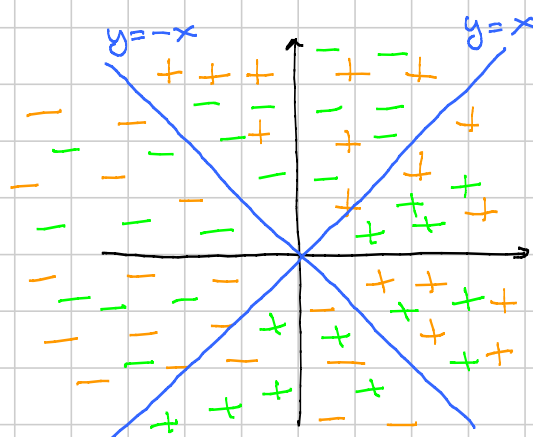
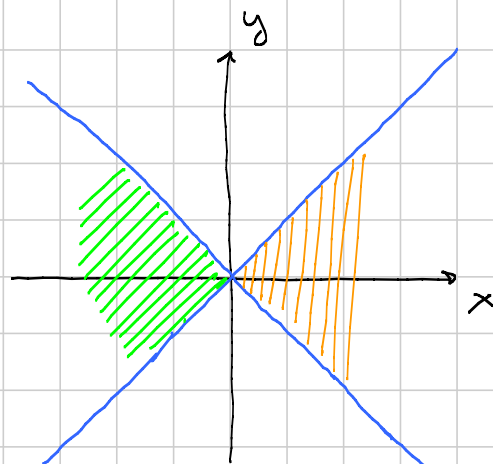
$(x+y)(x-y) \geq 0$ quindi 2 casi

- $x+y \geq 0, x-y \geq 0$ ●
 $y \geq -x, y \leq x$
- $x+y \leq 0, x-y \leq 0$ ●
 $y \leq -x, y \geq x$

Altro modo di ottenere lo stesso grafico: "disegnare" il segno delle due espressioni

$x+y$ ●
 $x-y$ ● $x-y \geq 0 \leadsto y \leq x$

Se voglio che il prodotto sia ≥ 0 ,
mi interessano le zone ++ e --



$$\textcircled{11 \text{ bis}} \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 0 \}$$

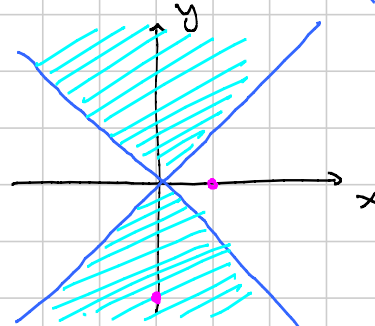
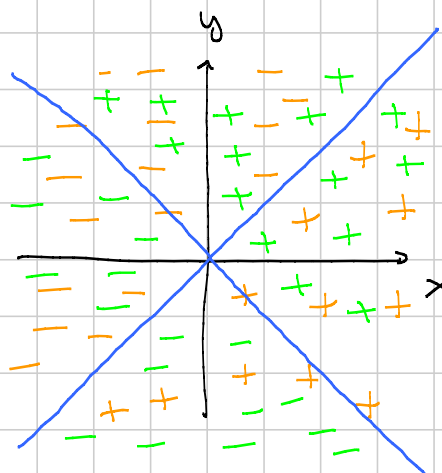
$$(x-y)(x+y) \leq 0$$

- $x-y$ ●
 $x-y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq x$
 $x-y \leq 0 \Leftrightarrow y \geq x$
- $x+y$ ●
 $x+y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x$
 $x+y \leq 0 \Leftrightarrow y \leq -x$

Ora ci interessano zone +- e -+

[verificare qualcosa!]

— 0 — 0 —



ANALISI 2

LEZIONE 02

[In differita per emergenza COVID-19]

Note Title

06/03/2020

DISEGNO DI INSIEMI DEL PIANO

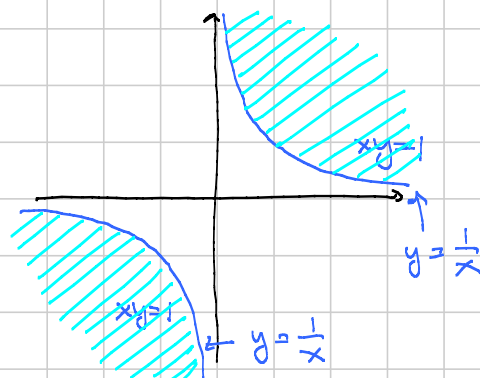
① $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}$

$xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$

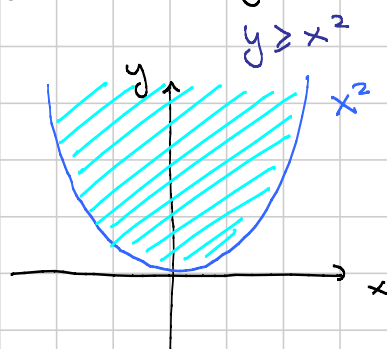
$xy \geq 1 \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{x} \quad \text{NO!!!}$

Se divido, conservo i versi delle diseq.
Solo se sto dividendo per roba > 0 ,
altrimenti devo invertire i versi !!

$$xy \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{se } x > 0 \text{ divido } \leadsto y \geq \frac{1}{x} \\ \text{se } x < 0 \text{ divido e } \boxed{\text{inverte}} \leadsto y \boxed{\leq} \frac{1}{x} \end{cases}$$

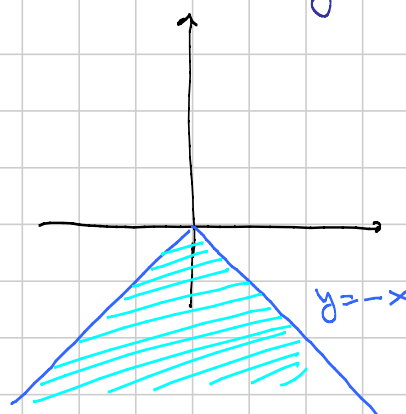


② $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 \geq 0\}$



③ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + |x| \leq 0\}$

$y \leq -|x|$

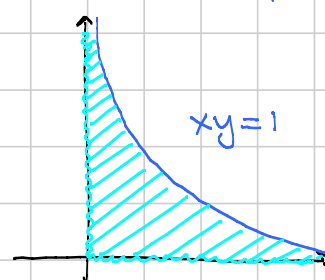


④ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x \geq 0, y \geq 0}_{1^\circ \text{ quadr.}}, xy \leq 1\}$

 1° quadr.

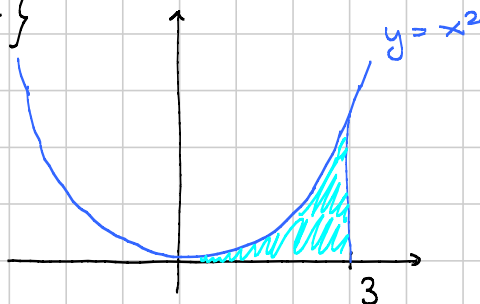
$y \leq \frac{1}{x}$

(Posso dividere
perché $x > 0$)



$$\textcircled{5} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x^2\}$$

x compreso tra 0 e 3
 y sopra 0 e sotto x^2



$$\textcircled{6} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: xy(x^2+y^2-1) \leq 0\}$$

x ●

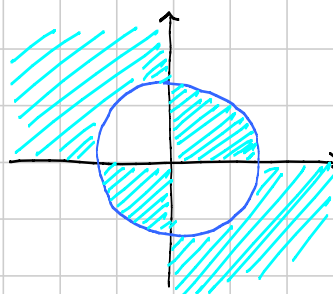
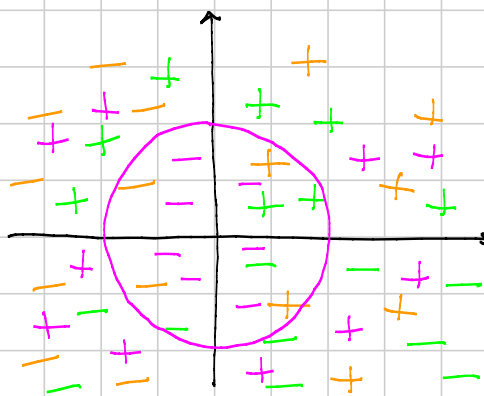
y ●

x^2+y^2-1 ●

$$x^2+y^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 1$$

Ci interessano le zone con

- 3 segni -
- ++ -



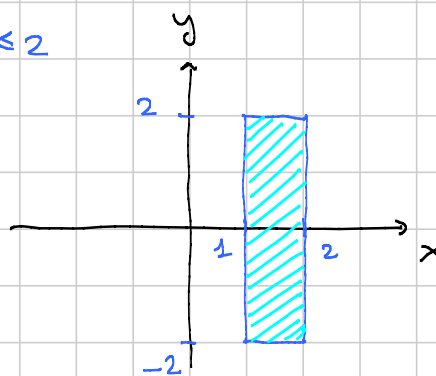
$$\textcircled{7} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \underbrace{x^2-3x+2 \leq 0}, \underbrace{y^2-4 \leq 0}\}$$

$$(x-2)(x-1) \leq 0$$

$$1 \leq x \leq 2$$

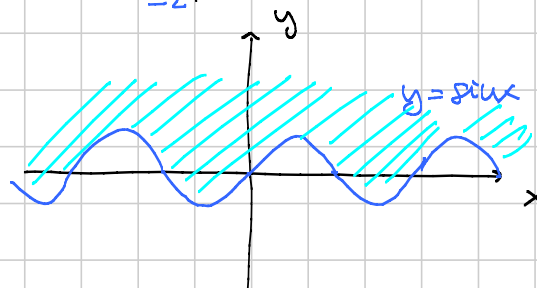
$$y^2 \leq 4$$

$$-2 \leq y \leq 2$$



$$\textcircled{8} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \sin x - y \leq 0\}$$

$$y \geq \sin x$$

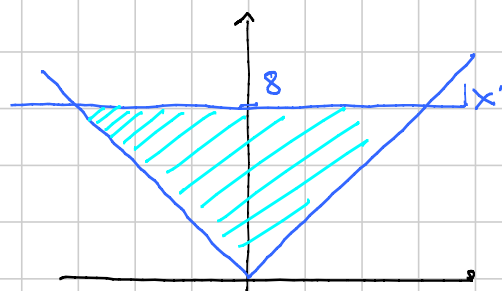


$$\textcircled{9} \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 8 \}$$

Due condizioni vere contempor.

$$y \leq 8$$

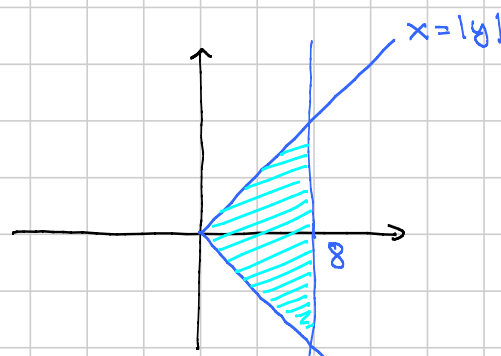
$$y \geq |x|$$



$$\textcircled{10} \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x \leq 8 \}$$

$$x \leq 8$$

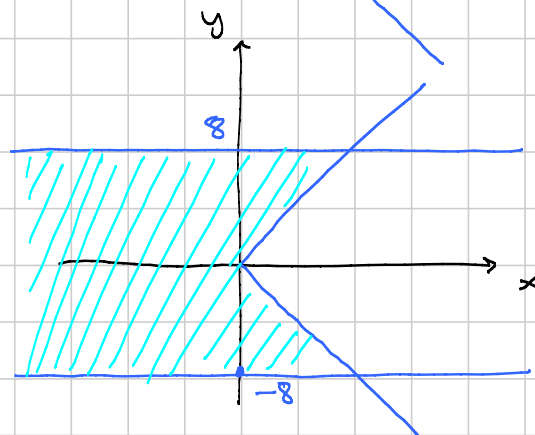
$$x \geq |y|$$



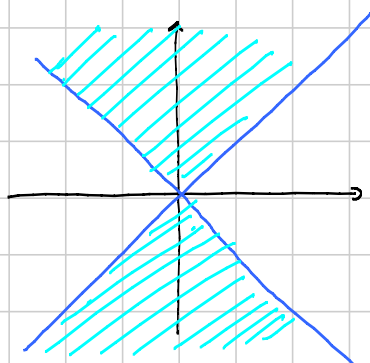
$$\textcircled{11} \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq |y| \leq 8 \}$$

$$x \leq |y| \quad (x \text{ a sinistra di } |y|)$$

$$|y| \leq 8 \quad (-8 \leq y \leq 8)$$

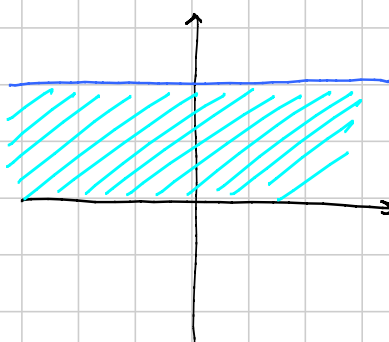


$$\textcircled{12} \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 0, y^2 - 4y \leq 0 \}$$



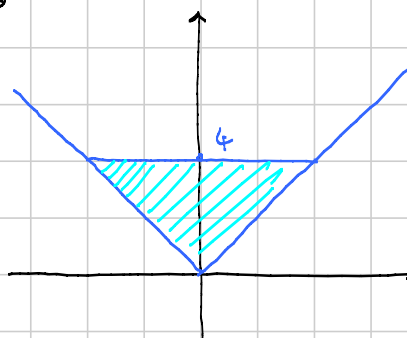
$$x^2 - y^2 \leq 0$$

$$(x-y)(x+y) \leq 0$$



$$y^2 - 4y \leq 0$$

$$0 \leq y \leq 4$$



Anzi ottenuto lo stesso $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 4 \}$

⑬ IMPORTANTE $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: |x| + |y| \leq 2\} = A$

Bisognerebbe considerare 4 casi a seconda del segno di x e y

1° quadrante: $x+y \leq 2, y \leq 2-x$

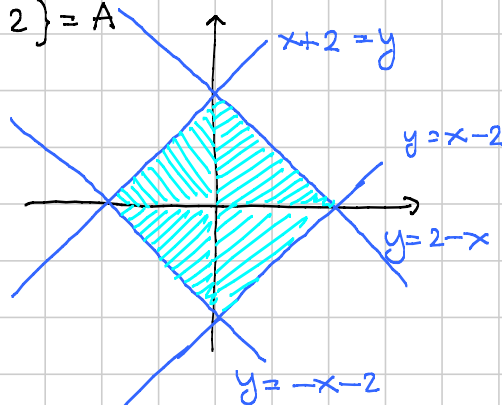
Ora possiamo procedere in due modi

1° modo Trattone allo stesso modo gli altri quadranti

2° quadrante: $|x| + |y| \leq 2 \Leftrightarrow -x + y \leq 2 \quad y \leq x+2$

3° " : " $\Leftrightarrow -x - y \leq 2 \quad y \geq -x-2$

4° " : $|x| + |y| \leq 2 \Leftrightarrow x - y \leq 2 \quad y \geq x-2$

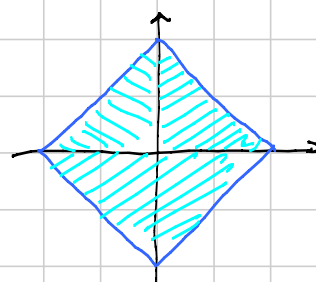


2° modo Osservare che l'insieme è simmetrico risp. agli assi

$(x,y) \in A \Leftrightarrow (-x,y) \in A$ (simmetrico risp. asse y)

$(x,y) \in A \Leftrightarrow (x,-y) \in A$ (simmetria " " x)

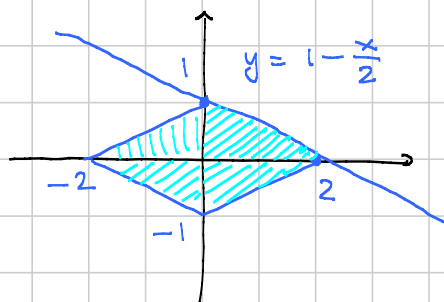
Una volta capito il 1° quadrante, basta "ribaltare"



⑭ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: |x| + 2|y| \leq 2\}$

1° quadrante: $x+2y \leq 2$
 $y \leq 1 - \frac{x}{2}$

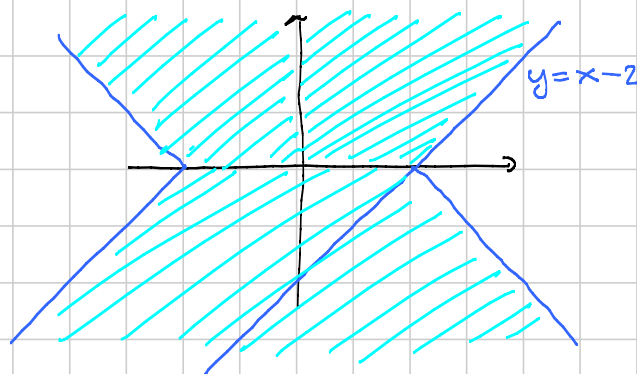
Replico per simmetria



⑮ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| \leq 2\}$

1° quadrante: $x - y \leq 2$
 $y \geq x - 2$

Ripeto per simmetria



[Per esercizio: dividere i casi nei 4 quadranti!]

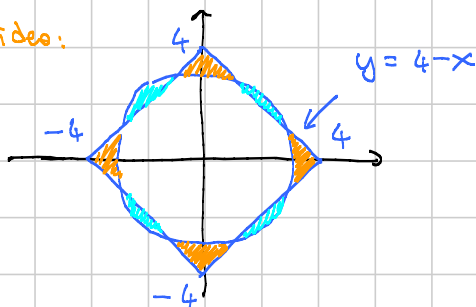
⑯ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 4, x^2 + y^2 \geq 9\}$

dentro al
rombo

fuori dal
cerchio di raggio 3

[Conetto dopo video:

La zona è
quella arancione,
ovviamente!]



Cerchio e rombo si
intersecano?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$x^2 + 16 - 8x + x^2 = 9$$

$$2x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = 16 - 14 > 0$$

si intersecano!

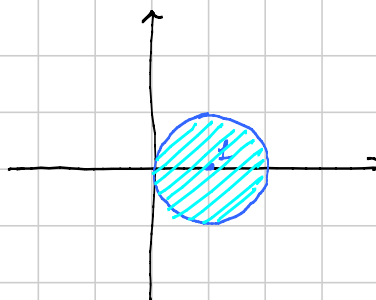
Quattro zone laterali

⑰ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 \leq 0\}$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1$

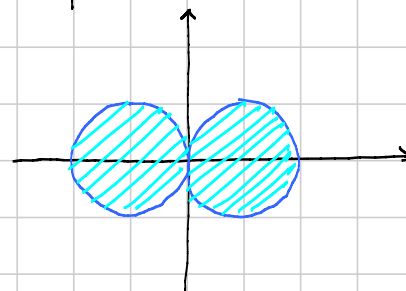
$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$

distanza da (1,0) ≤ 1



⑱ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2|x| + y^2 \leq 0\}$

Come prima per $x \geq 0$, poi simmetrico
rispetto asse y .



— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 03

[In differita per emergenza COVID-19]

Note Title

06/03/2020

GRAFICI DI FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Prerequisiti: lezione 1 e inizio lezione 2 di AM2-14

Setting: funzioni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y)$
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$
 $\uparrow$
 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ sottinsieme

$$\text{Grafico}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$$

Due modi per esplorare un grafico

→ LINEE DI LIVELLO

→ PERCORSI DI OMINI

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y^2$

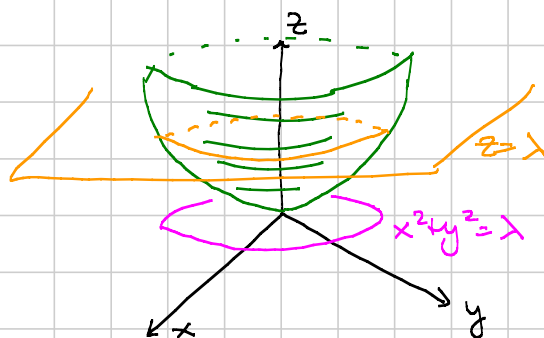
Linee di livello:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \lambda\}$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \lambda\}$$

$\uparrow$ numero reale dato

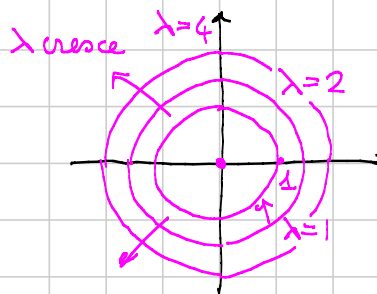
Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, cerchiamo i p.ti del piano base xy in cui il grafico sta "ad altezza λ ".



Altra interpretazione: intersechiamo il grafico con il piano $z = \lambda$ (piano orizzontale) e poi proiettiamo sul piano xy

- Per $\lambda < 0$ l'intersezione è $\emptyset$
- Per $\lambda = 0$ è solo l'origine
- Per $\lambda > 0$ è la circ. con centro in $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$

Le linee di livello sono circ.
di raggio che cresce con λ



Più ci allontaniamo da $(0,0)$, più
le linee di livello diventano
vicine tra di loro

Percorso di un uovo

Pensiamo ad una curva nel piano

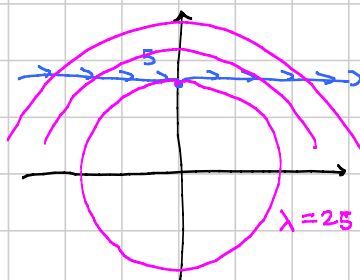
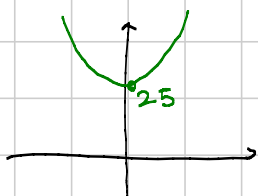
$(x(t), y(t)) \leftarrow$ punto in cui si trova
un uovo al tempo t

- $(t, 0) \rightsquigarrow$ percorre asse x
- $(0, t) \rightsquigarrow$ " " y
- $(t, 2t) \rightsquigarrow$ " retta $y = 2x$
- $(t, t^2) \rightsquigarrow$ percorre parabola $y = x^2$

Se $(x(t), y(t))$ è il percorso dell'uovo nel piano xy , il
numero $f(x(t), y(t))$ è l'altezza "la quota" a cui si trova
l'uovo nel corrispondente p.to del grafico.

$$f(t, 0) = t^2$$

$$f(t, 5) = t^2 + 25$$



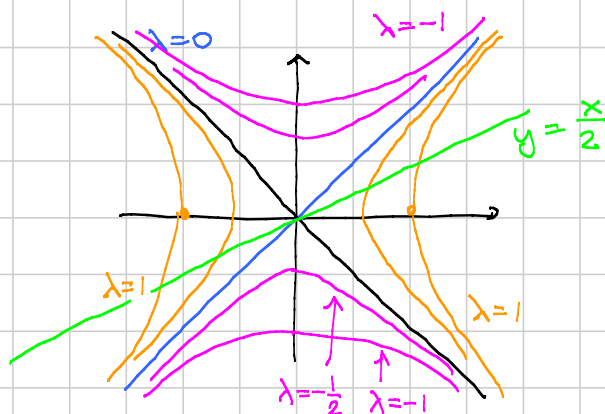
↑ intersezione del grafico
con il piano $y = 5$

— o — o —

Esempio 2 $f(x,y) = x^2 - y^2$

linee di livello : $x^2 - y^2 = \lambda$

- $\lambda = 0 \rightsquigarrow x^2 - y^2 = 0$ •
- $\lambda = 1 \rightsquigarrow x^2 - y^2 = 1$ •
- $\lambda = -1 \rightsquigarrow x^2 - y^2 = -1$ •



$$f(0,0) = 0$$

sopra e sotto "scuola"

dx e sx salgo

Proviamo con omino

$$f(t,0) = t^2$$

$$f(0,t) = -t^2$$



omino asse x

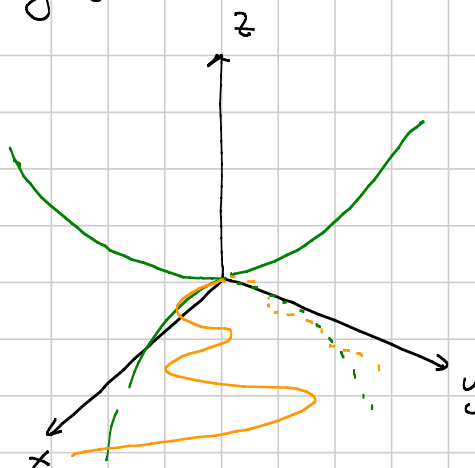
omino asse y

$$f(2t,t) = 4t^2 - t^2 = 3t^2$$



omino retta $y = \frac{x}{2}$

Il grafico ha un p.to di sella nell'origine
(o passo montano)



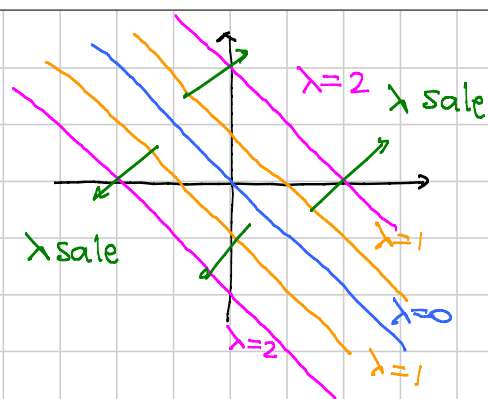
Esempio 3 $f(x,y) = |x+y|$

linee di livello : $|x+y| = \lambda$

- $\lambda < 0 \leadsto$ insieme $\emptyset$
- $\lambda = 0 \leadsto x+y=0 \leadsto y=-x$
- $\lambda > 0 \leadsto |x+y| = \lambda$

$$\begin{array}{ll} x+y = \lambda & y = \lambda - x \\ x+y = -\lambda & y = -\lambda - x \end{array}$$

È come appoggiare un libro parzialmente aperto
lungo la retta $y = -x$



Esempi ulteriori nel video.

ANALISI 2

LEZIONE 04

[In differita per coronavirus]

Note Title

07/03/2020

LIMITI A O PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI (2 in realtà)

Prerequisiti : AM2-14 fino alla lezione 3.

Recap teoria $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ (notazione vettoriale) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ NON ESISTE se le precedenti sono false.[Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^d$, allora ovunque ... $\forall x \in (A \cap B_\delta(x_0)) \setminus \{x_0\}$]
— o — o —**SLOGAN**: i limiti per funzioni di più variabili hanno pochissima voglia di esistere

① Come dimostro che un certo limite esiste ?

- Usare metateorema (funzioni continue)
- Usare disuguagliante + teorema carabinieri
- Ridursi a funzioni di 1 variabile con opportuni cambi di variabile
- Coordinate polari
- Uso delle successioni

② Come dimostro che un certo limite non esiste ?

- Trovo due "direzioni" in cui il limite viene diverso.

Esempio 1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sin x + \cos y + 7} = 0$

Osserviamo che $f(x,y)$ è definita in tutto $\mathbb{R}^2$ senza pbm. barcollanti. Per il metateorema è continua ovunque, quindi basta sostituire $(0,0)$ al posto di (x,y) .

Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2}$

Osserviamo che f è definita per $(x,y) \neq (0,0)$. Non solo: se sostituisco $(0,0)$ viene $\frac{0}{0}$, quindi una forma indet..

Ora

$$0 \leq \frac{x^4}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1 \text{ (denom} \geq \text{num)}} \cdot x^2 \leq x^2$$

quindi

$$\boxed{0} \leq \frac{x^4}{x^2+y^2} \leq \boxed{x^2} \leftarrow \text{metateorema}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 0$
 $\quad \quad \quad \text{(per teo. carabinieri)}$

Esempio 3 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$

Come prima è forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Osservo che

$$\boxed{0} \leq \frac{|y^3|}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \cdot |y| \leq \boxed{|y|}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 0 \quad \quad 0$

Ora uso la tecnica del valore assoluto (vedi les. analisi 1)

Se $\lim_{\dots} |f(x,y)| = 0$, allora $\lim_{\dots} f(x,y) = 0$.

Esempio 4 (Granole classico)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{NON ESISTE}$$

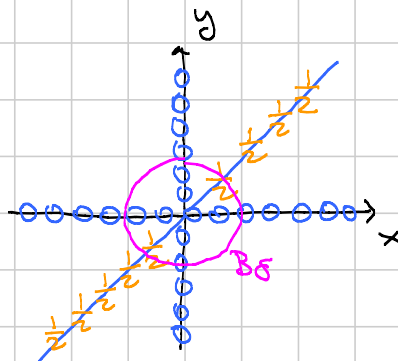
Come è fatta la fusione?

$$p(t, 0) \equiv 0 \quad (\text{asse } x)$$

$$f(0, t) \equiv 0 \quad (\text{asse } y)$$

$$\rho(t, t) \equiv \frac{1}{2}$$

↑ bisettrice I e III

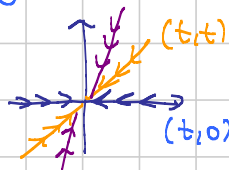


Questo basta per dire che il limite non esiste: se esistesse, $f(x,y)$ "dovrebbe assumere valori vicini a l in $B_\delta(0,0)$ "

Più formalmente, cerchiamo 2 direzioni in cui il limite viene diverso

19: $(t, 0) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t, 0) = 0 \quad (\text{muoversi lungo asse } x)$

$$2^a: (t, t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \frac{1}{2}$$



NOTA BENE : $(t,0)$ e (t,t) tendono a $(0,0)$ per $t \rightarrow 0$

Oss. Se mi muovo lungo la retta generica (t, ut) ottengo

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, ut) = \frac{ut^2}{t^2 + u^2 t^2} = \frac{u}{1 + u^2}$$

quindi il limite dipende dalla direzione di avvicinamento!!

Esempio 5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ NON ESISTE

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2} = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 asse x asse y

Esempio 6 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$ NON ESISTE

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$$

↑
asse x positivo

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} = -\infty$$

↑
asse x negativo

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(0, t) = 0$$

↑
asse y positivo

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{2t^2} = -\infty$$



Esempio 7 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{|x|+|y|}$

Ancora una volta $\frac{0}{0}$ e $f(x,y)$ è definita per ogni $(x,y) \neq (0,0)$.

1° modo Disuguaglianza + carabinieri

$$0 \leq \frac{y^2}{|x|+|y|} = \frac{|y|}{|x|+|y|} \cdot |y| \leq |y|$$

≤ 1

Conclusione con metateorema + carabinieri

2° modo Coordinate polari $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$

Osserv. fond. : $(x,y) \rightarrow (0,0) \Leftrightarrow \rho \rightarrow 0$

$$\frac{y^2}{|x|+|y|} = \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\rho (|\cos \theta| + |\sin \theta|)} = \rho \frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta| + |\sin \theta|}$$

Voglio stimare dall'alto la funzione di θ

→ Banalmente $\sin^2 \theta \leq 1$

→ Il denominatore è una funzione continua di θ , dunque per $\theta \in [0, 2\pi]$ ammette un minimo m (teo. di Weierstrass di analisi 1)

Osservo che $m = |\cos \theta_0| + |\sin \theta_0|$, dove θ_0 è un p.to di min. I due termini non possono essere entrambi nulli, dunque $m > 0$ e quindi

$$|\cos \theta| + |\sin \theta| \geq m > 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

↑
non dipende da θ

Ne segue che

$$\frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta| + |\sin \theta|} \leq \frac{1}{m}$$

↑
num. + grande
denom. + piccolo

Ma allora

$$0 \leq p \frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta| + |\sin \theta|} \leq p \cdot \frac{1}{m} \leftarrow \text{indipendente da } \theta.$$

Mando $p \rightarrow 0$ e uso i carabinieri.

Oss. L'importante è ridursi ad un limite per $p \rightarrow 0$ di roba che NON DIPENDE da θ

Allo stesso modo si facevano gli esempi 2 e 3

$$\frac{x^4}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y^3}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{p^4 \cos^4 \theta}{p^2} = p^2 \cos^4 \theta$$

$$\frac{p^3 |\sin \theta|^3}{p^2} = p |\sin \theta|^3$$

$$0 \leq p^2 \cos^4 \theta \leq p^2$$

$$0 \leq p |\sin \theta|^3 \leq p$$

↓
0

↓
0

↓
0

↓
0

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 05

[In differita per coronavirus]

Note Title

07/03/2020

Esempio 1 (Fondamentale) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

Funzione definita per $(x,y) \neq (0,0)$

Esplorazione: $(t,0) \rightsquigarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = 0$ (asse x)

$(0,t) \rightsquigarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = 0$ (asse y)

$(t,t) \rightsquigarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t^4 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t^2 + 1} = 0$

$(t, mt) \rightsquigarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot mt}{t^4 + m^2 t^2}$

↑
generica retta
 $y = mx$

$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt}{t^2 + m^2} = 0$

↑
se $m \neq 0$, viene $\frac{0}{m^2} = 0$
se $m = 0$ è banale

Il limite viene $= 0$ procedendo
su ogni retta passante per $(0,0)$

Questo fatto da solo NON basta.

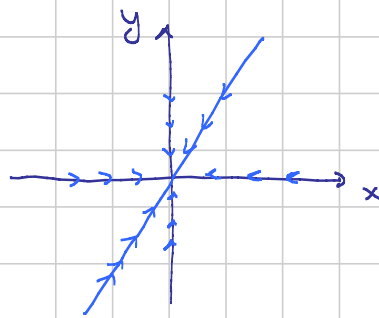
Proviamo con le coordinate polari:

$$\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \rho \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}$$

Ora faccio il lim per $\rho \rightarrow 0$.

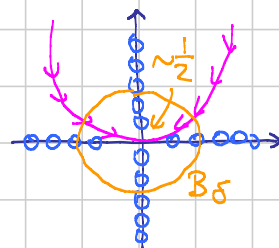
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} = 0 \cdot \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (\text{caso})$$

- Se $\sin \theta \neq 0$ ragiono come sopra e viene 0
- Se $\sin \theta = 0$, allora sto facendo il limite di frazione $\equiv 0$.



Ultimo tentativo: proviamo ad avvicinarci a $(0,0)$ lungo una parabola (t, t^2)

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2} \quad \text{OPS!!}$$



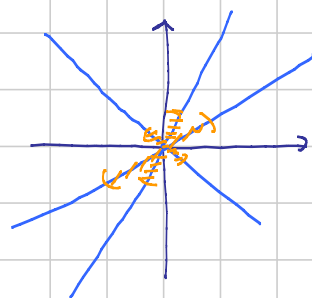
Questo vuol dire che il limite NON ESISTE.

Achtung! • Non basta che il Diomite sia lo stesso su tutte le rette

- Quando si lavora in coord. polari, bisogna ridursi a qualcosa indipendente da θ !!
(fare tendere $\rho \rightarrow 0$ con θ fisso = ragionare sulle rette)

Euristica geometrica : perchè non basta considerare le rette

Supponiamo $f(t, mt) \rightarrow 0$ per ogni m



Dato $\varepsilon > 0$, su ogni retta c'è un intorno dell'origine in cui $|f| \leq \varepsilon$.

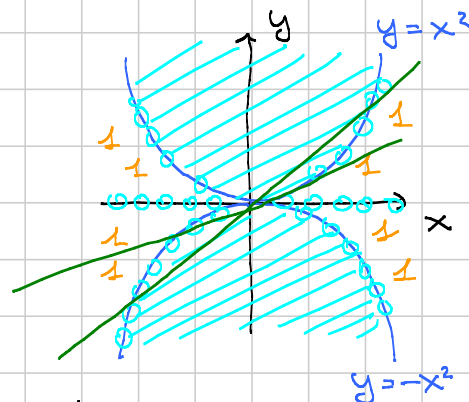
L'intervallo dipende dalla retta (o da θ).

Metteno insieme gli intorni non è detto che si ottenga qualcosa che contiene un cerchio centrato in $(0,0)$.

Esempio burocratico

Consideriamo f che vale

- 0 dentro la parabola e sull'asse x
- 1 fuori dalla parabola



È evidente che $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, ut) = 0$ per ogni u .

È evidente che $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ N.E.

Esempio 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2} = 0$

Infatti

$$0 \leq \frac{|x|y^2}{x^4+y^2} = \underbrace{\frac{y^2}{x^4+y^2}}_{\leq 1} \cdot |x| \leq |x| \leadsto \text{finale con i carabinieri}$$

Esempio 3 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+2y^2}{x^2+3y^2}$ NON esiste

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2} = 1 \quad \text{asse } x$$

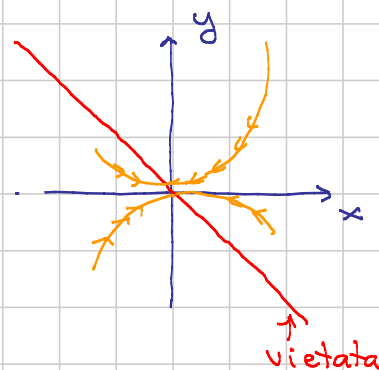
$$\lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2}{3t^2} = \frac{2}{3} \quad \text{asse } y$$

Esempio 4 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x+y}$ Definita per $x+y \neq 0$

• Proviamo con le rette $\lim_{t \rightarrow 0} f(t,mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt^3}{(m+1)t} = 0$

• Proviamo con le parabole $y=mx^2$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(t,mt^2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt^4}{t+mt^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt^3}{1+mt} = 0 \end{aligned}$$



• Se ragionarsi in coord. polari

$$\frac{\rho^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho (\cos \theta + \sin \theta)}$$

Fissato θ , la funzione tende a 0 per $\rho \rightarrow 0$

↑
qualunque

↑ equivalente a ragionare sulle rette, quindi non basta!!

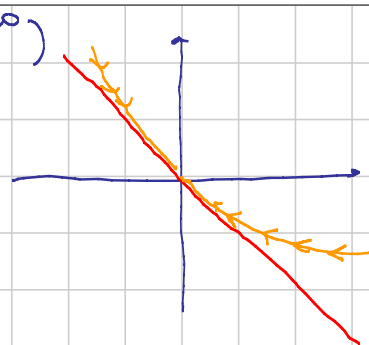
Proviamo avvicinando $(t, -t + t^{2020})$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, -t + t^{2020})$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 (-t + t^{2020})}{\cancel{t} - \cancel{t} + t^{2020}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1 + t^{2019}}{t^{2017}} = -\infty, \text{ quindi il limite in generale non esiste.}$$

[Corretto dopo video]



Esempio 5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|^a}{x^4 + y^6}$

Per quali valori di a il limite esiste?

TECNICA DI PAREGGIAMENTO ESPONENTI

Pongo $x = u^6$ e $y = v^4$. Osservo che $(x,y) \rightarrow (0,0) \Leftrightarrow (u,v) \rightarrow (0,0)$

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{u^6 |v|^{4a}}{u^{24} + v^{24}}$$

↑ ↑
esponenti uguali 😊

In coord. polari $\frac{\rho^{6+4a} \cos^6 \theta |\sin \theta|^{4a}}{\rho^{24} (\cos^{24} \theta + \sin^{24} \theta)} = \rho^{4a-18} \cdot \frac{\cos^6 \theta |\sin \theta|^{4a}}{\cos^{24} \theta + \sin^{24} \theta} \leq \frac{1}{n}$

Se $4a > 18$, cioè $a > \frac{9}{2}$, allora il limite fa 0.

Se $4a \leq 18$, allora il limite non esiste, come si verifica provando $f(t^6, mt^4)$ e mandando $t \rightarrow 0$

↑ ↑
scelta che pareggia gli esponenti

con n = min del denom., che è > 0 come nella lezione 4

[Grafici nel video]

ANALISI 2

LEZIONE 06

[In differita per coronavirus]

Note Title

07/03/2020

DERIVATE PARZIALI, DIREZIONALI, DIFFERENZIALE, GRADIENTEPrerequisiti: AM2-14 fino alla lezione 6RECAP TEORIA $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = f_{x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h} \quad \text{Deriv. PARZIALE}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h v) - f(x_0)}{h} \quad \text{con } v \in \mathbb{R}^d, v \neq 0 \quad \text{Deriv. direz.}$$

$$\nabla f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_d}(x_0)) \quad \text{Gradiente}$$

 f differenziabile in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}^d$ t.c.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \alpha, h \rangle + o(|h|) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

A posteriori $\alpha = \nabla f(x_0)$ e

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

formula per deriv. direzionali

Come calcolo derivate parziali / direzionali?

- Usando la definizione (se si può, si evita)
- Usando le regole di derivazione come ad Analisi 1
- Per le derivate direzionali, quando f è diff. si usa la formula

Come dimostro che f è differenziabile in x_0 ?

- Usando la definizione (se si può, si evita)
- Teo. diff. totale (se le deriv. parziali sono continue, allora tutto ok)

Calcolo di derivate parziali

faccio finta che y sia costante

$$\bullet f(x, y) = x^3 + y^7$$

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 0 = 3x^2$$

$$f_y(x, y) = 7y^6$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x$$

$$f_{yx}(x, y) = (7y^6)_x = 0$$

$$f_{xy}(x, y) = (3x^2)_y = 0$$

$$f_{yy}(x, y) = 42y^5$$

Notazione : $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

[Teoria : le derivate parziali miste, se sono continue, non dipendono dall'ordine in cui si eseguono le derivate (te. inversione dell'ordine di derivazione)]

$$\bullet f(x, y) = x^3 \cdot y^7$$

$$f_x(x, y) = 3x^2 \cdot y^7$$

$$f_y(x, y) = x^3 \cdot 7y^6$$

$$f_{xx}(x, y) = 6xy^7$$

$$f_{yx}(x, y) = 7y^6 \cdot 3x^2 = 21x^2y^6$$

$$f_{xy}(x, y) = 3x^2 \cdot 7y^6 = 21x^2y^6$$

$$f_{yy}(x, y) = 42x^3y^5$$

$$\bullet f(x, y) = y e^{x^2y}$$

$$f_x(x, y) = y \cdot 2xy e^{x^2y} = 2xy^2 e^{x^2y}$$

$$f_y(x, y) = e^{x^2y} + y \cdot e^{x^2y} \cdot x^2 = e^{x^2y} (1 + x^2y)$$

$$\bullet f(x, y) = \frac{x}{x+y}$$

$$f_x(x, y) = \frac{x+y - 1 \cdot x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{0 \cdot (x+y) - 1 \cdot x}{(x+y)^2} = -\frac{x}{(x+y)^2}$$

$$\bullet f(x, y) = y^x$$

$$f_x(x, y) = [\text{lo penso come } (a^x)'] = y^x \cdot \log y$$

$$f_y(x, y) = [\text{lo penso come } (y^a)'] = x y^{x-1}$$

Calcolo di derivate direzionali

$$f(x,y) = xy + y^2$$

$$v = (1,2)$$

Vogliamo calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(-3,4)$.

→ Osserviamo che f è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$ (co. diff. totale, essendo f_x e f_y continue) e

$$\nabla f(x,y) = (y, x+2y)$$

→ Ora posso usare la formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(-3,4) = \langle \nabla f(-3,4), (1,2) \rangle = \langle (4,5), (1,2) \rangle = 4+10 = 14$$

Se volessi farlo a mano, dovrei calcolare

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = \frac{(-3+h)(4+2h) + (4+2h)^2 - (-12+16)}{h}$$

$\uparrow$
 $x_0 + hv = (-3+h, 4+2h)$

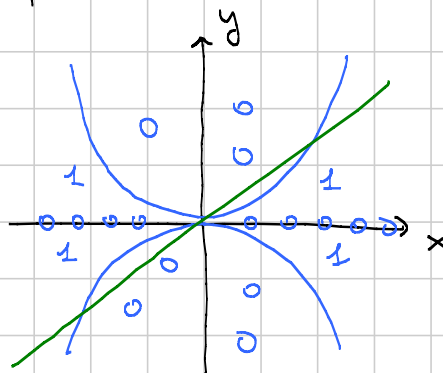
= controllare che venga uguale!
 — o — o —

Achtung! L'esistenza di derivate parziali e direzionali non implica in generale la differenziabilità e nemmeno la continuità

Esempio (un po' burocratico) Solito con le parabole

Comunque io scelga retta per l'origine, si ha che $f=0$ sulla retta in un intorno di 0, quindi tutte le deriv. direzionali sono nulle.

Tuttavia f non è continua in $(0,0)$.



Esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Domande: $\rightarrow$ è continua in $(0,0)$?
 $\rightarrow$ ha deriv. parziali / direzionali in $(0,0)$?
 $\rightarrow$ è diff. in $(0,0)$?

Continuità : sì (coord. polari : $|f(x,y)| = |\rho \cos^3 \theta| \leq |\rho|$)

Deriv. parziali : usiamo la definizione per quelle direzionali
 Sia $v = (a,b)$. Dobbiamo calcolare ($x_0 = (0,0)$)

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha v) - f(x_0)}{\alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\alpha a, \alpha b)}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha^3 a^3}{\alpha^2 (a^2 + b^2)} = \frac{a^3}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Sì: esistono tutte le derivate direzionali, quindi pure quelle parziali. In particolare

$$f_x(0,0) \underset{\substack{\uparrow \\ (a,b)=(1,0)}}{=} 1 \quad \text{e} \quad f_y(0,0) \underset{\substack{\uparrow \\ (a,b)=(0,1)}}{=} 0$$

e quindi $\nabla f(0,0) = (1,0)$

Differenziabilità : no. Se lo fosse, allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), (a,b) \rangle = \langle (1,0), (a,b) \rangle = a$$

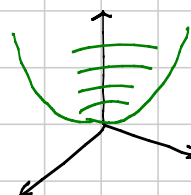
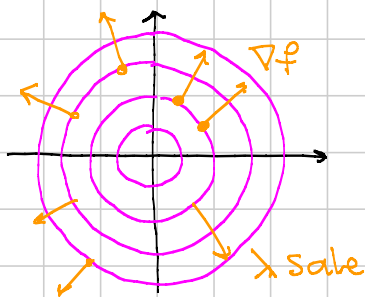
ma dalla formula sappiamo che è tutt'altro!
 $\quad \quad \quad \underline{\quad 0 \quad} \quad \underline{\quad 0 \quad}$

Interpretazione geometrica di ∇f

∇f = direzione in cui andare per avere la massima crescita di f

= vettore applicato nel p.to x_0 che è $\perp$ alla linea di livello di f passante per quel punto e che punta nella direzione " λ cresce "

Esempio solito $f(x,y) = x^2 + y^2$



$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

[Grafici nel video]

ANALISI 2

— LEZIONE 07
[In differita per coronavirus]

Note Title

11/03/2020

Max - min per funzioni di più variabiliRecap teoria $\min \{f(x) : x \in A\}, \max \{f(x) : x \in A\}$ Teorema di Weierstrass Sia $A \subseteq \mathbb{R}^d$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo(i) A compatto (chiuso + limitato)(ii) f è continua.Allora di sicuro f ammette max/min in A .

Chi sono i candidati p.ti di max/min?

- ① P.ti x interni ad A t.c. $\nabla f(x) = 0$ (stazionari interni)
- ② P.ti x " " " $\nabla f(x)$ non esiste (singolari interni)
- ③ P.ti del bordo di A . (bordo)

Approcci:

- disuguaglianze elementari
 - linee di livello
 - parametrizzazione del bordo
 - moltiplicatori di Lagrange
- } per trattare tutto A
- } per trattare il bordo di A

Recap definizioni

- $A \subseteq \mathbb{R}^d$ si dice limitato se $\exists R > 0$ t.c. $A \subseteq B(0, R)$
palla di raggio sufficiente
- $x_0 \in A$ si dice interno ad A se
esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq A$
- A si dice chiuso se per ogni $x \notin A$
esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \cap A = \emptyset$



Esempio 1 $f(x,y) = x - 3y$

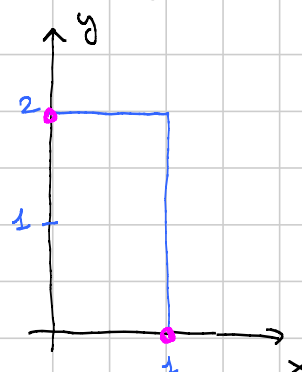
$$A = [0, 1] \times [0, 2]$$

1° modo: disug. elementari

$$f(x,y) = x - 3y \leq 1 - 0 = 1 \text{ per } (x,y) \in A$$

$\uparrow$
 x + grande poss.
 y + piccolo poss.

Vale il segno di $=$ se e solo se $x=1$ e $y=0$.



Di conseguenza: $\max = 1$, p.to di max: $(1,0)$

$$f(x,y) = x - 3y \geq 0 - 3 \cdot 2 = -6 \text{ per } (x,y) \in A$$

$\uparrow$
 x + piccolo poss.
 y + grande poss.

con $=$ se e solo se $x=0$ e $y=2$.

Di conseguenza: $\min = -6$, p.to di min: $(0,2)$

2° modo: metodo delle linee di livello

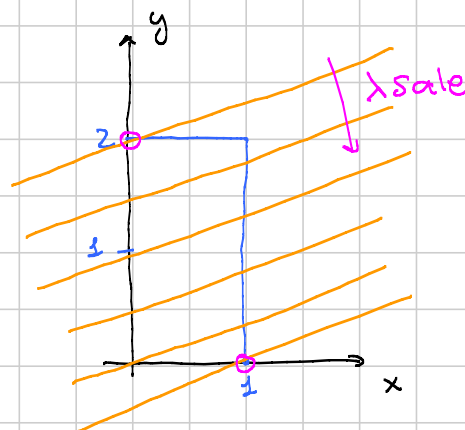
Disegniamo le linee di livello di f ,
 cioè

$$x - 3y = \lambda \quad \leadsto \quad y = \frac{x}{3} - \frac{\lambda}{3}$$

Trovare max e p.to di max = trovare
 la linea di livello con λ max tra
 quelle che intersecano A

Trovare il min = linea di livello con λ min che interseca A

Dalla figura è evidente che $(1,0)$ è p.to di max e $(0,2)$ è p.to di min.

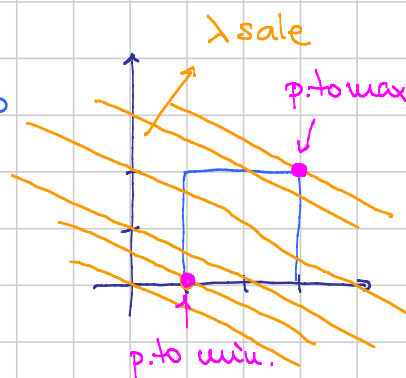


Esempio 2 $f(x,y) = x+2y$ $A = [1,3] \times [0,2]$

1° metodo $f(x,y) = x+2y \leq 3+2 \cdot 2 = 7$
 $\uparrow$
 con = se e solo se $x=3$ e $y=2$

$f(x,y) = x+2y \geq 1+2 \cdot 0 = 1$
 $\uparrow$
 con = se e solo se $x=1$ e $y=0$

Conclusione : $\rightarrow \max = 7$, p.to di max: $(3,2)$
 $\rightarrow \min = 1$, p.to di min: $(1,0)$



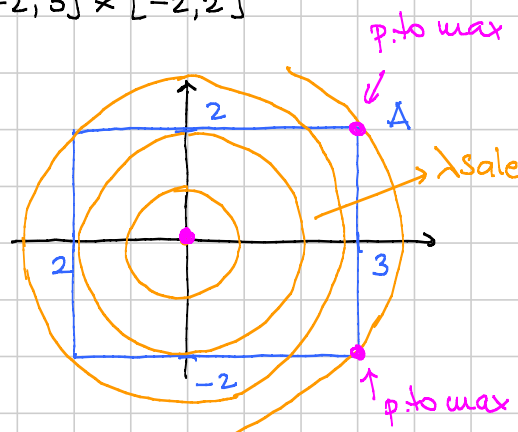
2° metodo $x+2y = \lambda \leadsto y = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2}$

Esempio 3 $f(x,y) = x^2+y^2$ $A = [-2,3] \times [-2,2]$

Linee di Livello : $x^2+y^2 = \lambda$

$\rightarrow \min = 0$, p.ti di min: $(0,0)$

$\rightarrow \max = 13$, p.ti di max: $(3,2)$
 $(3,-2)$

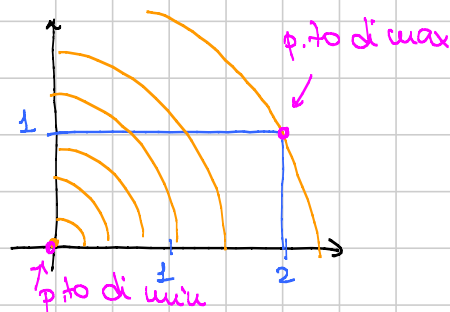


Esempio 4 $f(x,y) = x^2+y^2$ $A = [0,2] \times [0,1]$

$x^2+y^2 = \lambda$

$\rightarrow \min = 0$, p.ti di min: $(0,0)$

$\rightarrow \max = 5$, p.ti di max: $(2,1)$



Esempio 5

$$f(x,y) = x^2 - y^3$$

$$A = [-2, 2] \times [-1, 2]$$

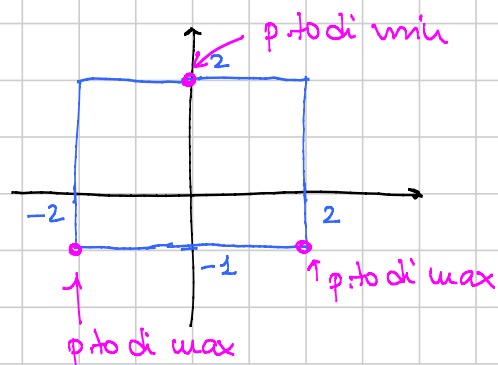
Disuguaglianze elementari

$$x^2 - y^3 \leq 4 - (-1) = 5 \quad \text{in } A$$

$\uparrow$
 x^2 + grande poss.

y^3 + piccolo poss.

con = se e solo se $x = \pm 2$ e $y = -1$



$$x^2 - y^3 \geq 0 - 8 \quad \text{in } A \quad \text{con = se e solo se } x=0 \text{ e } y=2$$

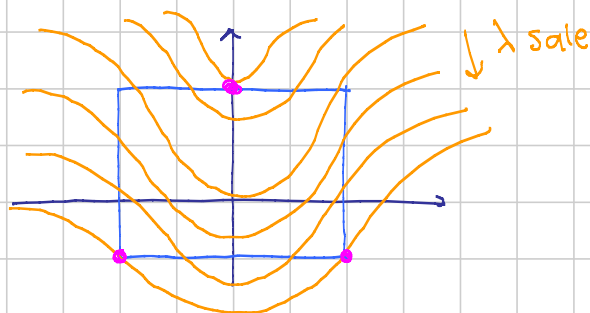
$\uparrow$
 x^2 + piccolo poss.

y^3 + grande poss.

Conclusione: $\rightarrow$ max = 5, p.ti di max: $(-2, -1)$ e $(2, -1)$

$\rightarrow$ min = -8, p.ti di min: $(0, 2)$

Linee di livello? $x^2 - y^3 = \lambda \rightsquigarrow y^3 = x^2 - \lambda \rightsquigarrow y = \sqrt[3]{x^2 - \lambda}$

Esempio 6

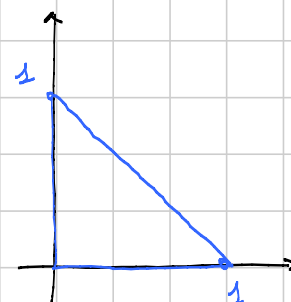
$$f(x,y) = x + 2y$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

$$f(x,y) = x + 2y \geq 0 + 0 = 0$$

con = se e solo se $x=0$ e $y=0$.

Quindi: min = 0, p.ti di min: $(0,0)$.



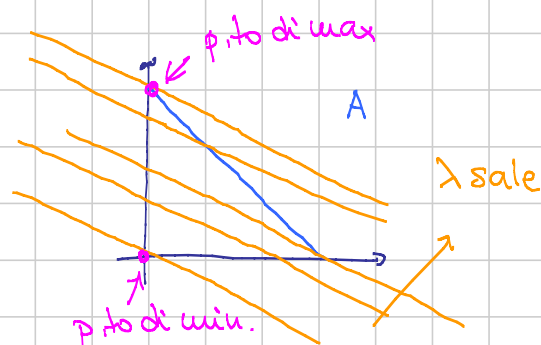
$f(x,y) = x+2y \leq 1+2 \cdot 1 = 3$ con = se e solo se $x=1$ e $y=1$
 MA IL PUNTO $(1,1) \notin A$, quindi il metodo non funziona.

Proviamo quindi le linee di livello

$$x+2y = \lambda \rightsquigarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2}$$

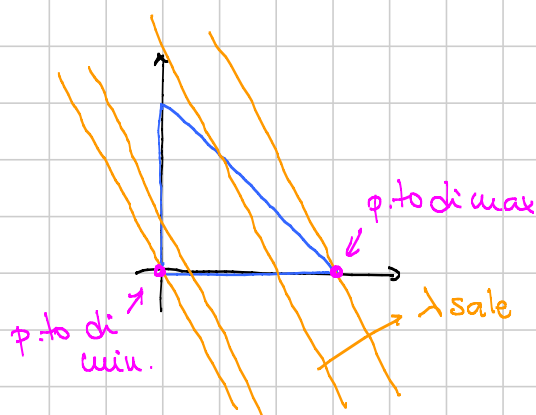
Quindi: $\max = 2$, p.to di max: $(0,1)$

[conetto dopo video]



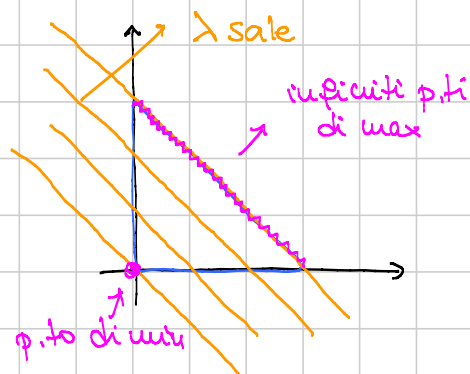
Esempio 7 $f(x,y) = 2x+y$
 A come prima

$$2x+y = \lambda \rightsquigarrow y = -2x + \lambda$$



Esempio 8 $f(x,y) = x+y$
 A come prima

$$x+y = \lambda \rightsquigarrow y = -x + \lambda$$



→ $\min = 0$, p.to di min: $(0,0)$

→ $\max = 1$, p.to di max: TUTTO il segmento
 di estremi $(1,0)$ e $(0,1)$.

— o — o —

ANALISI 2

— LEZIONE 08

[In differita per coronavirus]

Note Title

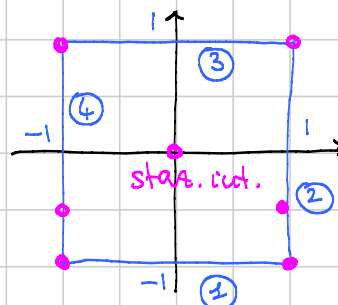
11/03/2020

Esempio 1 $f(x,y) = xy + y^2$

$$A = [-1,1] \times [-1,1]$$

linee di livello e disug. non completamente ovvie 😞

Procedura standard



① P.ti stazionari interni $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \leadsto x = 0$

L'unico p.to è $(0,0)$

② P.ti singolari interni: fortunatamente non ci sono 😊

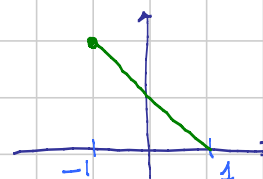
③ Bordo: unione di 4 segmenti. Li parametizzo tutti

3.1 $(t, -1)$ con $t \in [-1,1]$. Considero la restrizione al segmento

$$\varphi_1(t) = f(t, -1) = -t + 1 \quad \text{e la studio per } t \in [-1,1]$$

Max per $t = -1 \leadsto$ p.to $(-1, -1)$

min per $t = 1 \leadsto$ p.to $(1, -1)$

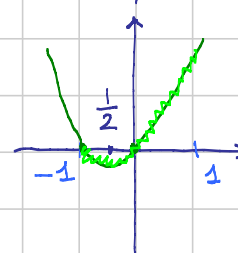


3.2 $(1, t)$ con $t \in [-1,1]$. La restrizione è

$$\varphi_2(t) = f(1, t) = t + t^2 \quad \text{con } t \in [-1,1]$$

Max per $t = 1 \leadsto$ p.to $(1, 1)$

min per $t = \frac{1}{2} \leadsto$ p.to $(1, \frac{1}{2})$



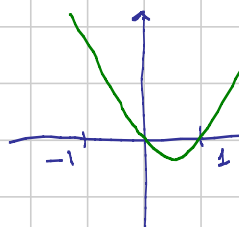
3.3 $(t, 1)$ con $t \in [-1, 1]$

$\varphi_3(t) = t + 1$ max / min nei
2 estremi



3.4 $(-1, t)$ con $t \in [-1, 1]$

$\varphi_4(t) = f(-1, t) = -t + t^2$



Max per $t = -1 \rightsquigarrow (-1, -1)$

min per $t = \frac{1}{2} \rightsquigarrow (-1, \frac{1}{2})$

Alla fine abbiamo 7 candidati, che andiamo a sostituire in $xy + y^2$

$f(0, 0) = 0$

Conclusione

$f(-1, -1) = 2$

$f(1, -1) = 0$

$f(1, 1) = 2$

$f(-1, 1) = 0$

$f(1, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$f(-1, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

$\rightarrow \max = 2$, p.ti di max: $(-1, -1)$ e $(1, 1)$

$\rightarrow \min = -\frac{1}{4}$, p.ti di min: $(1, -\frac{1}{2})$ e $(-1, \frac{1}{2})$.

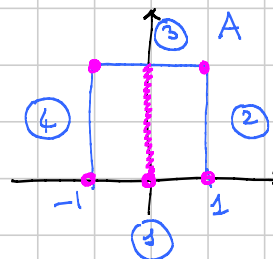
Esempio 2 $f(x, y) = x^4 - x^2 y$

$A = [-1, 1] \times [0, 2]$

① Staz. interni : $\begin{cases} 4x^3 - 2xy = 0 \\ -x^2 = 0 \end{cases}$

Le soluzioni sono $x = 0$

y qualunque

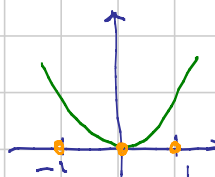


Quindi tutto l'asse y è fatto da p.ti stazionari (infiniti candidati!)

② Sing. interni : $\emptyset$ 😊

③ 4 pezzi di bordo

3.1 $(t, 0) \rightsquigarrow \varphi_1(t) = t^4$ con $t \in [-1, 1]$



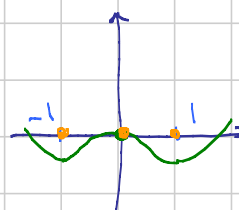
Candidati: $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$

3.2 $(1, t) \rightsquigarrow \varphi_2(t) = 1 - t$ con $t \in [0, 2]$

È una retta, quindi i candidati sono gli estremi: $(1, 0)$, $(1, 2)$

3.3 $(t, 2) \rightsquigarrow \varphi_3(t) = t^4 - 2t^2$ che va studiata per $t \in [-1, 1]$

$$\varphi_3'(t) = 4t^3 - 4t = 4t(t^2 - 1)$$



3.4 $(-1, t) \rightsquigarrow \varphi_4(t) = 1 - t \rightsquigarrow$ ancora una volta gli estremi

Confrontiamo i candidati

$$f(0, y) = 0$$

$$f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$$

$$f(1, 2) = f(-1, 2) = -1$$

Conclusione:

$$\rightarrow \max = 1, \text{ p.ti di max: } (\pm 1, 0)$$

$$\rightarrow \min = -1, \text{ p.ti di min: } (\pm 1, 2)$$

Esempio 3 $f(x, y) = x^4 - x^2 y$

$$A = [-2, 2] \times [0, 2]$$

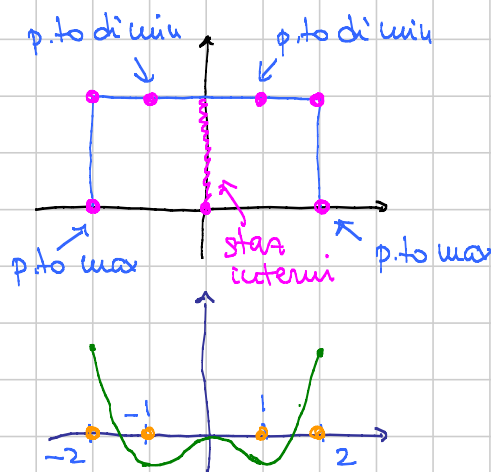
⋮

3.1 $(\pm 2, 0)$ e $(0, 0)$

3.2 $(2, 0)$ e $(2, 2)$

3.4 $(-2, 0)$ e $(-2, 2)$

3.3 $\varphi_3(t) = t^4 - 2t^2$ con $t \in [-2, 2]$



$$f(0,y) \equiv 0$$

$$f(\pm 2, 0) = 16 \quad \leftarrow \text{Max e p.ti di max}$$

$$f(\pm 2, 2) = 8$$

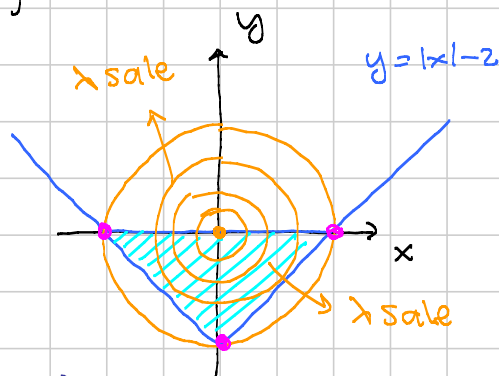
$$f(\pm 1, 2) = -1 \quad \leftarrow \text{min e p.ti di min}$$

Esempio 4 $f(x,y) = x^2 + y^2$
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - 2 \leq y \leq 0\}$

Linee di livello : $x^2 + y^2 = \lambda$

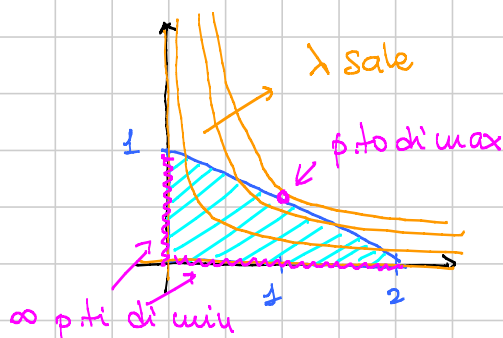
$\rightarrow \text{min} = 0$ p.to di min : $(0,0)$

$\rightarrow \text{max} = 4$, p.ti di max : $(-2,0)$
 $(2,0)$ e $(0,-2)$



Esempio 5 $f(x,y) = xy$
 A come in figura

Linee di livello : assi per $\lambda = 0$
e poi iperboloidi per $\lambda > 0$



$\rightarrow \text{min} = 0$, p.ti di min = infiniti p.ti dei 2 cateti

Come determino il p.to di max? Parametrizzo l'ipotenusa!

$$y = 1 - \frac{x}{2} \rightsquigarrow 2y = 2 - x \rightsquigarrow y = t, x = 2 - 2t \text{ con } t \in [0,1]$$

$(2-2t, t)$ con $t \in [0,1]$. Considero la restrizione

$$\varphi(t) = f(2-2t, t) = 2t - 2t^2 \quad \varphi'(t) = 2 - 4t \rightsquigarrow t = \frac{1}{2}$$

Quindi $\text{max} = \frac{1}{2}$, p.to di max : $(1, \frac{1}{2})$.

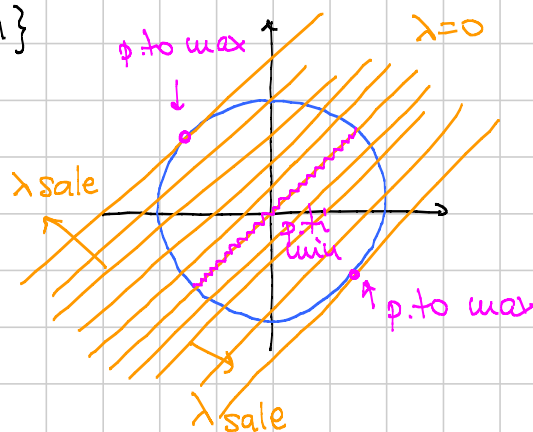
Esempio 6 $f(x,y) = (x-y)^2$
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Linee di livello : $(x-y)^2 = \lambda$

Per $\lambda < 0 \rightsquigarrow \emptyset$

Per $\lambda = 0 \rightsquigarrow x = y$

Per $\lambda > 0 \rightsquigarrow x-y = \pm\sqrt{\lambda}$
 $y = x \pm \sqrt{\lambda}$



$\rightarrow \min = 0$ con ∞ p.ti di min (tutti quelli della retta $y=x$ che cascano dentro il cerchio)

$\rightarrow \max = 2$, p.ti di max: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

— o — o —

ANALISI 2

- LEZIONE 09

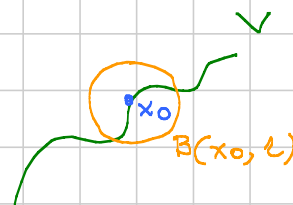
[In differita per coronavirus]

Note Title

12/03/2020

Moltiplicatori di Lagrange - Caso di un moltiplicatore

$$V = \{x \in \mathbb{R}^d : \Phi(x) = 0\} \quad (\text{luogo di zeri di } \Phi)$$

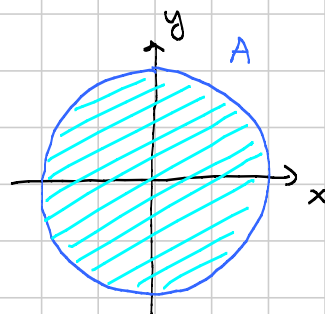


Se $x_0 \in V$ è p.to di max / min locale per $f(x)$ ristretta a V (cioè esiste $\epsilon > 0$ t.c. $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in V \cap B(x_0, \epsilon)$) allora (se le funzioni f e Φ sono regolari) x_0 ricade in una delle seguenti due categorie

① Soluzioni del 1° sistema $\begin{cases} \nabla \Phi = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$ (p.ti di V in cui $\nabla \Phi = 0$)

② Soluzioni del 2° sistema $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla \Phi \\ \Phi = 0 \end{cases}$ (p.ti di V in cui ∇f è multiplo di $\nabla \Phi$)

Esempio 1 $f(x, y) = x + 2y$
 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$



Staz. interni : $\nabla f = 0$ $\begin{cases} 1 = 0 \\ 2 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$

Sing. interni : $\emptyset$

NOTA PRELIMINARE: A è compatto + f continua
 $\Rightarrow$ max e min esistono.

Già ora sappiamo che i p.ti di max / min esistono e stanno sul bordo.

Ora il bordo di A è $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{\Phi(x, y)} = 0\}$

quindi è il luogo di zeri di $\Phi(x, y)$

1° sistema

$$\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Nessuna soluzione
(di solito succede così)

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

3 equ. in 3 incognite:
di solito c'è soluzione

Dividendo le prime 2 equ.: $\frac{1}{2} = \frac{x}{y} \leadsto y = 2x$

$\leadsto$ sostituisco nella 3ª $x^2 + 4x^2 = 1 \leadsto x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$
(stesso segno)

Abbiamo quindi 2 candidati

$\nearrow$ p.to di max

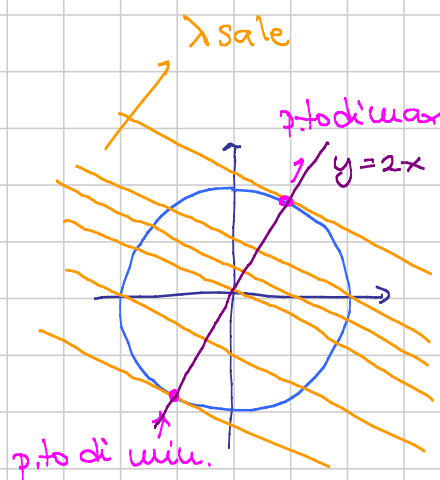
$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \leadsto f(\dots) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \boxed{\sqrt{5}} \text{ max}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \leadsto f(\dots) = \boxed{-\sqrt{5}} \text{ min.}$$

$\uparrow$ p.to di min.

Volendo si può interpretare con le linee di livello

$$x + 2y = \lambda \leadsto y = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2}$$



Oss. Volendo si poteva trattare il bordo parametrizzando

$$\text{bordo di } A = \{(\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$$

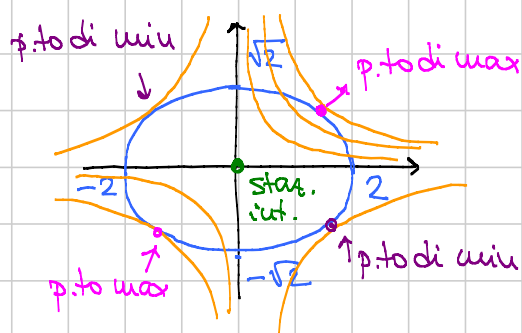
$$\varphi(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos t + 2 \sin t \text{ da studiare per } t \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi'(t) = -\sin t + 2 \cos t = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin t}{\cos t} = 2 \Leftrightarrow \tan t = 2$$

Conoscendo $\tan t$, con un po' di percorso trovo $\sin t$ e $\cos t$.

Esempio 2 $f(x,y) = xy$
 $A = \dots x^2 + 2y^2 \leq 4$

Prescan con le linee di livello:
 aspettiamo 2 p.ti di max e
 2 " " min.



Stazionari interni: $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \rightsquigarrow (0,0)$ Sing. int.: $\emptyset$

Bordo: luogo di zeri di $x^2 + 2y^2 - 4 = \Phi(x,y)$

1° sistema $\begin{cases} \Phi_x = 0 & 2x = 0 \\ \Phi_y = 0 & 4y = 0 \\ \Phi = 0 & x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases} \rightsquigarrow \emptyset$

2° sistema $\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases} \begin{cases} xy = 2\lambda x^2 \\ xy = 4\lambda y^2 \end{cases}$

$$\rightsquigarrow 2\lambda x^2 = 4\lambda y^2 \rightsquigarrow 2\lambda(2y^2 - x^2) = 0$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \lambda = 0 \quad \searrow 2y^2 = x^2 \\ \text{(1ª e 2ª equ.)} \downarrow \quad \downarrow \text{3ª equ} \\ x = y = 0 \quad \downarrow \text{3ª equ} \\ \text{incompatibile con 3ª} \quad 2x^2 = 4 \rightsquigarrow x = \pm\sqrt{2} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \pm 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{4 possibili} \\ \text{scelte dei} \\ \text{segni} \end{array}$$

Abbiamo in conclusione 5 candidati:

$$(0,0) \rightsquigarrow f(0,0) = 0$$

$$(\sqrt{2}, 1) \text{ e } (-\sqrt{2}, -1) \rightsquigarrow f(\dots) = \sqrt{2}$$

$$(-\sqrt{2}, 1) \text{ e } (\sqrt{2}, -1) \rightsquigarrow f(\dots) = -\sqrt{2}$$

$$\text{max} = \sqrt{2} \text{ con 2 p.ti max}$$

$$\text{min} = -\sqrt{2} \text{ con 2 p.ti min}$$

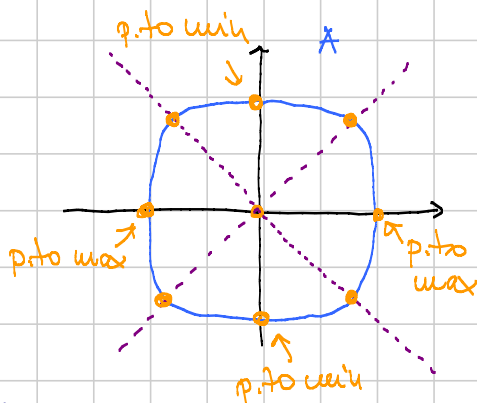
Oss. Si poteva parametrizzare il vincolo? $x^2 + 2y^2 = 4$

Sì! $(2 \cos t, \sqrt{2} \sin t) : t \in [0, 2\pi]$

[Esercizio: provare a vedere come sarebbero venuti i conti]

Esempio 3 $f(x, y) = x^2 - 2y^2$
 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$

A compatto + f continua $\Rightarrow$ max / min esistono



Staz. interni $\leadsto \dots$ solo $(0,0)$

Sing. interni: $\emptyset$

1° sistema $\Phi(x, y) = x^4 + y^4 - 1$

$$\begin{cases} 4x^3 \\ 4y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \leadsto \emptyset$$

2° sistema
$$\begin{cases} 2x = \frac{2}{\lambda} x^3 \\ 2y = \frac{2}{\lambda} y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Grande tentazione (EVITARE!);
 semplificare x e y nella 1ª e 2ª equ.

$$x(1 - 2\lambda x^2) = 0$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \\ x = 0 \\ \downarrow \text{3ª equ} \\ y = \pm 1 \\ \downarrow \\ (0, 1), (0, -1) \end{array} \quad \searrow \quad \begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{2\lambda} \end{array}$$

$$y(1 - 2\lambda y^2) = 0$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \\ y = 0 \\ \downarrow \text{3ª equ} \\ x = \pm 1 \\ \downarrow \\ (1, 0) \text{ e } (-1, 0) \end{array} \quad \searrow \quad \begin{array}{l} y^2 = \frac{1}{2\lambda} \end{array}$$

Quindi resta $x^2 = y^2$, da cui $x^4 = y^4$ e andando nella 3ª equ
 $x^4 = \frac{1}{2} = y^4 \leadsto x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \quad y = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

Restano 3 g.ti da sostituire

$$(0,0) \rightsquigarrow f(0,0) = 0$$

$$(\pm 1, 0) \rightsquigarrow f(\pm 1, 0) = \textcircled{1} \quad \text{Max}$$

$$(0, \pm 1) \rightsquigarrow f(0, \pm 1) = \textcircled{-2} \quad \text{min}$$

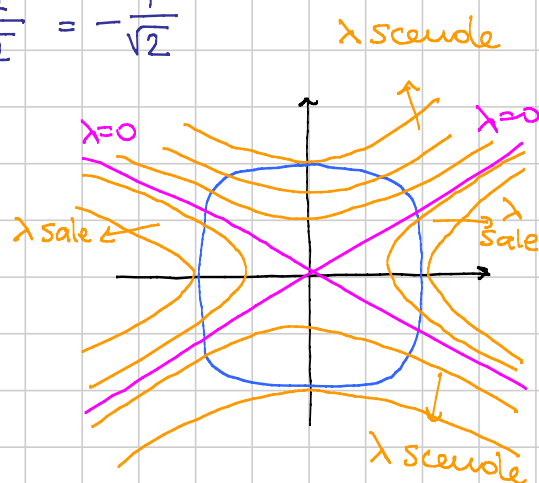
$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rightsquigarrow f(\dots) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Oss. Proviamo ad interpretare con le linee di livello

$$x^2 - 2y^2 = \lambda \rightsquigarrow \text{iperbole con asintoti}$$

$$x^2 = 2y^2 \rightsquigarrow x = \pm \sqrt{2}y$$

— o — o —



ANALISI 2

- LEZIONE 10

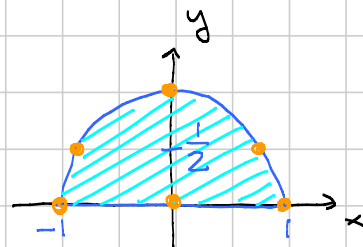
[In differita per coronavirus]

Note Title

12/03/2020

Utilizzo misto di moltiplicatori e altre tecniche

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y$
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$



Stas. interni e sing. interni : $\emptyset$

Osseviamo che max / min esistono per Weierstrass (va fatto per prima cosa)

Bordo, fatto di 2 pezzi

Semicirconferenza Possiamo usare i moltiplicatori MA

- dobbiamo escludere gli eventuali candidati con $y < 0$
- dobbiamo includere gli estremi della circ. tra i candidati ("bordi dei bordi" oppure "punti di taglio")

$$\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

1° sistema $\leadsto \dots \leadsto$ nessuna soluz.

2° sistema
$$\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \leftarrow \text{NON SEMPLIFICARE } x!!$$

$x(\lambda - 1) = 0$ (1ª equ. raccolta)

$x = 0$
 $\downarrow$ 3ª equ
 $y = \pm 1$

$\lambda = 1$
 $\downarrow$ 2ª equ
 $y = \frac{1}{2}$

$\xrightarrow{3^\circ} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

NO BUONO perché $y < 0$

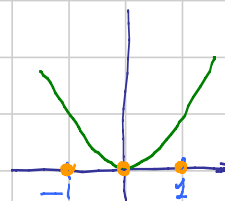
Sono emersi
 $(0,1)$ $(0,-1)$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Diametro Potrei usare i moltiplicatori con $\Phi(x,y) = y$ (provare!)
ma forse è + comodo parametrizzare

$$(t, 0) \text{ con } t \in [-1, 1] \rightsquigarrow \varphi(t) = f(t, 0) = t^2$$

Nuovo candidato: $t = 0 \rightsquigarrow (0, 0)$

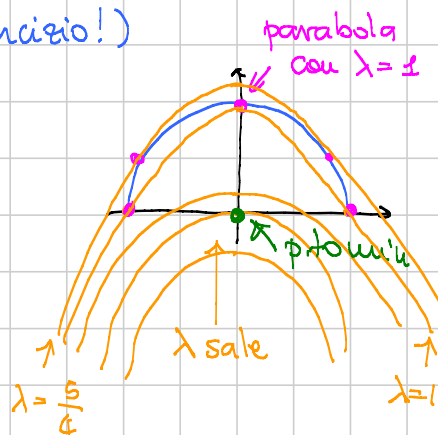


Non resta che sostituire i 6 p.ti in f (esercizio!)

Interpretazione con linee di livello

$$x^2 + y = \lambda \rightsquigarrow y = -x^2 + \lambda$$

Il disegno non chiarisce come è messa la linea di livello con $\lambda = 1$



$$f(-1, 0) = f(1, 0) = f(0, 1) = 1$$

$$f\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} > 1$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3 - xy\}$$

$$x^2 + y^2 + xy - 3 \leq 0 \rightsquigarrow \text{che sarà mai?}$$

Non è nemmeno evidente che sia limitato

Step 1 Mostriamo che A è limitato

$$x^2 + y^2 + xy \leq 3 \rightsquigarrow x^2 + xy + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4}y^2 \leq 3$$

$$\rightsquigarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \leq 3$$

Ma allora y^2 è limitato ($y^2 \leq 4$ e quindi $|y| \leq 2$ cioè $-2 \leq y \leq 2$)

Inoltre $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 \leq 3$, quindi $-\sqrt{3} \leq x + \frac{y}{2} \leq \sqrt{3}$ e quindi

$$x \leq \sqrt{3} - \frac{y}{2} \leq \sqrt{3} + 1 \quad \text{e} \quad x \geq -\sqrt{3} - \frac{y}{2} \geq -\sqrt{3} - 1$$

$\uparrow$ $y \geq -2$ $\uparrow$ $y \leq 2$

Così abbiamo dimostrato che, se $(x, y) \in A$, allora le variabili x e y sono limitate, quindi $A \subseteq$ rettangolo.

Inoltre A è chiuso (perché i vincoli sono $\geq$ e $\leq$), e quindi per W. max e min esistono.

N.B. Senza questa prima parte, non ha senso iniziare a cercarli !!!

Step 2 Stationari interni: solo $(0, 0)$
Sing. interni: $\emptyset$

Step 3 Bordo via moltiplicatori con $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3$

1° sistema Non ha soluzioni

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

2° sistema

$$\begin{cases} 2x = \lambda(2x + y) & 2xy = \lambda(2x + y) \cdot y \\ 2y = \lambda(2y + x) & 2xy = \lambda(2y + x) \cdot x \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$$

$$\lambda(2x + y)y = \lambda(2y + x)x \quad \text{NON SEMPLIFICARE } \lambda !!$$

$$\lambda(2\cancel{x}y + y^2 - 2\cancel{y}x - x^2)$$

$$\lambda = 0$$

$\downarrow$ 1° e 2°
 $x = y = 0$ e
non va bene
nella 3° :-

$$\downarrow x^2 = y^2$$

$$\nearrow y = x \leadsto 3x^2 = 3 \leadsto x = y = \pm 1$$

$$\searrow y = -x \leadsto x^2 = 3 \leadsto x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3}$$

Il bordo ha prodotto 4 candidati

$(1,1)$ e $(-1,-1) \rightsquigarrow f = 2$

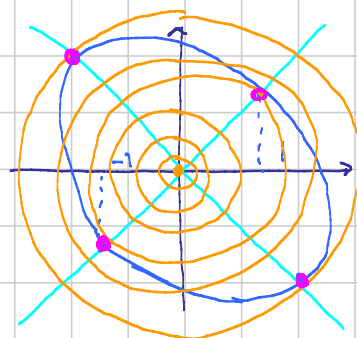
$(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \rightsquigarrow f = 6 \leftarrow \text{max}$

Non dimentichiamo

$(0,0) \rightsquigarrow f = 0$

$\uparrow$
p.to di min

$\uparrow$
min



Oss. geometrica Il metodo dei moltiplicatori cerca i p.ti del luogo che stiamo considerando in cui la linea di livello che passa è tangente al luogo.

Approccio alternativo allo stesso esercizio : SOSTITUIRE IL VINCOLO

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{vincolo: } x^2 + y^2 = 3 - xy$$

Quindi: invece di fare max/min di $x^2 + y^2$, posso fare max/min di $3 - xy$, oppure volendo fare min/max di xy .

Avevo potuto studiare $f(x,y) = xy \dots$ saltando i passaggi...

2° sistema

$$y = \lambda (2x + y)$$

$$x = \lambda (2y + x)$$

$$\phi = 0$$

$$xy = \lambda (2x + y)x$$

$$xy = \lambda (2y + x)y$$

e come prima si arrivava a $x = \pm y$.

Esempio 3 max/min $\{ xy : x^2 + y^2 = 3 - xy \}$
 $\uparrow$
uguale!

Questo vuol dire studiare sul solo bordo, quindi niente staz. aut. e sing. int., ma solo 1° e 2° sistema.

Le conclusioni sarebbero state

$\rightarrow \text{max} = 1$ p.ti di max: $(1,1)$ e $(-1,-1)$

$\rightarrow \text{min} = -3$ p.ti di min: $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
— 0 — 0 —

ANALISI 2

- LEZIONE 11

[In differita per coronavirus]

Note Title

13/03/2020

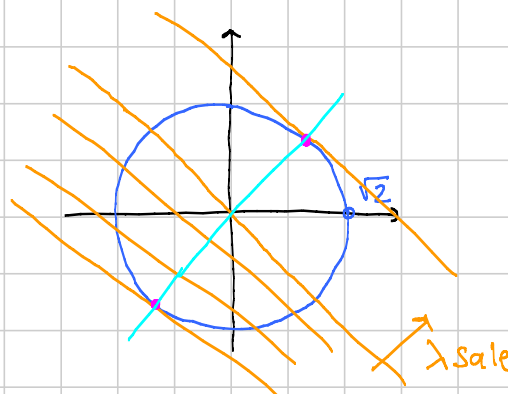
Max / min di funzioni con valori assoluti

Strategia generale : $\rightarrow$ studio il problema senza val. assoluto
 $\rightarrow$ cerco di concludere

Esempio 1 $f(x,y) = |x+y-5|$
 $x^2+y^2 \leq 2 \leftarrow$ insieme

Studio max / min di $x+y-5$

$W \Rightarrow$ max / min esistono



Linee di livello : $x+y-5 = \lambda \leadsto x+y = 5+\lambda$

Conclusioni: p.to di max : $(1,1)$ e $\max = -3$

p.to di min : $(-1,-1)$ e $\min = -7$

Sappiamo che $x+y-5$ è negativa in tutto A , quindi fare il valore assoluto vuol dire cambiare segno.

Quando cambio segno, max e min si invertono, dunque per $|x+y-5|$ avremo

p.to di max : $(-1,-1)$ e $\max = 7$

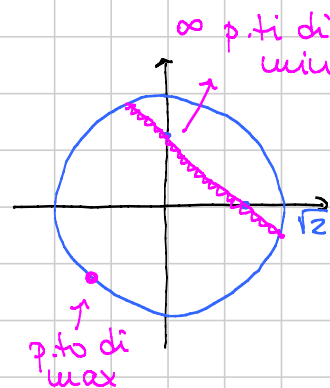
p.to di min : $(1,1)$ e $\min = 3$

Esempio 2 $f(x,y) = |x+y-1|$
 $A =$ come prima

Se studio $g(x,y) = x+y-1$, avremo

$\rightarrow$ p.to di max : $(1,1)$ e $\max = 1$

$\rightarrow$ p.to di min : $(-1,-1)$ e $\min = -3$



Cosa succede facendo il val. assoluto?

→ Per il max se la giocano il vecchio max (cioè 1) e il vecchio min. cambiato di segno (cioè 3)

→ Il minimo è per forza 0

Conclusioni: → max = 3, p.to di max: $(-1, -1)$

→ min = 0 e ci sono infiniti p.ti di min.,
cioè tutti i p.ti della retta $x+y=1$ che
stanno in A.

Esempio 3 $f(x, y) = |x - e^y|$
 $A = [0, 1] \times [-1, 1]$

Studiamo $g(x, y) = x - e^y$

$$g(x, y) = x - e^y \leq 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

↑
se e solo se $x=1$ e $y=-1$

$$g(x, y) = x - e^y \geq 0 - e = -e$$

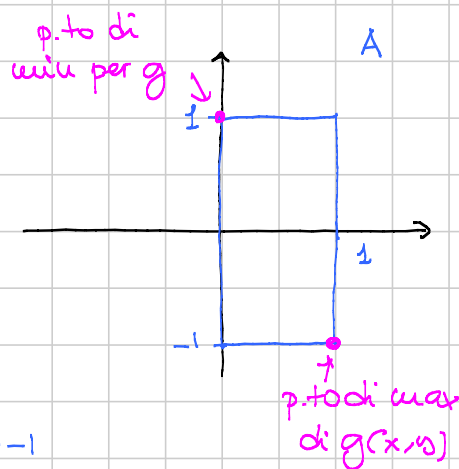
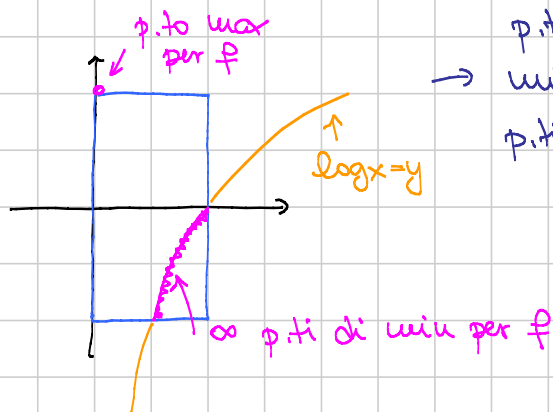
↑
se e solo se $x=0$ e $y=1$

Conclusioni per $g(x, y)$: → p.to di max: $(1, -1)$ e max = $1 - \frac{1}{e} > 0$
→ " " min: $(0, 1)$ e min = $-e$

Conclusioni per $f(x, y)$: → max = e (vecchio min con segno invert.)

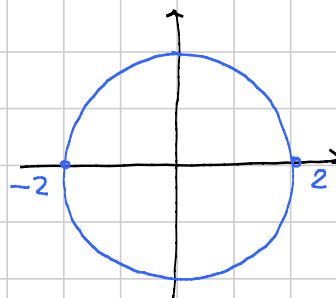
p.to di max = $(0, 1)$

→ min = 0 e p.ti di min sono i
p.ti di A t.c. $x = e^y$



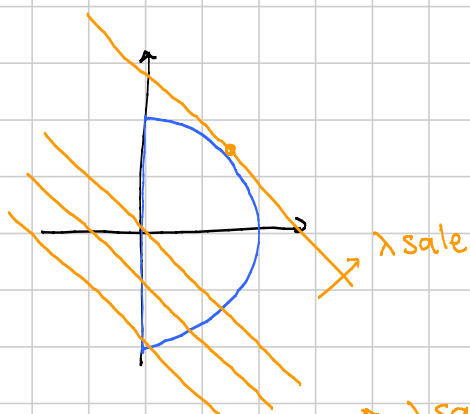
Esempio 3 $f(x,y) = |x| + y$
 Insieme: $x^2 + y^2 \leq 4$

Achtung! Il valore assoluto non coinvolge tutta la funzione,
 QUINDI DEVO DIVIDERE I CASI.

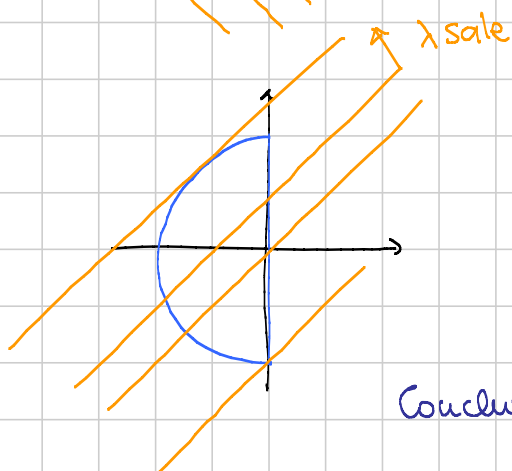


$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{dove } x \geq 0 \\ -x+y & \text{dove } y \leq 0 \end{cases}$$

Quindi devo studiare $x+y$ nel semicerchio a dx
 " " $-x+y$ nel " " sx



$$\begin{aligned} \max &= 2\sqrt{2} & \text{p.to di max: } (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ \min &= -2 & \text{p.to di min: } (0, -2) \end{aligned}$$



$$-x+y=\lambda \quad y=x+\lambda$$

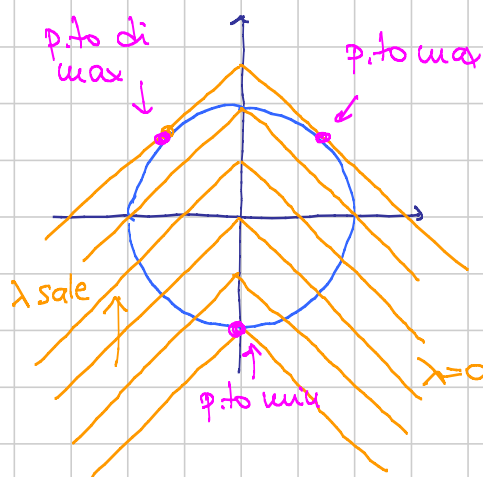
$$\begin{aligned} \max &= 2\sqrt{2} & \text{p.to di max: } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ \min &= -2 & \text{p.to di min: } (0, -2) \end{aligned}$$

Conclusione per funzione globale

$$\rightarrow \max = 2\sqrt{2} \quad \text{p.ti di max: } (\pm\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\rightarrow \min = -2 \quad \text{p.ti di min: } (0, -2)$$

Metodo alternativo Fare direttamente
le linee di livello $f(x,y) = \lambda$
 $|x|+y = \lambda \rightsquigarrow y = -|x| + \lambda$



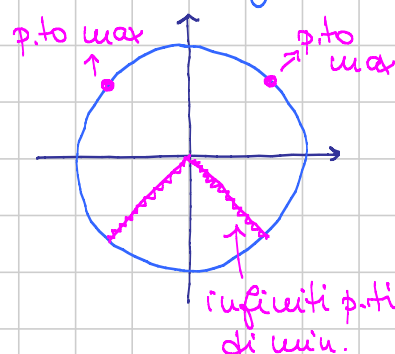
Esempio 4 Stesso A di prima
 $f(x,y) = |x|+y$

Si tratta di prendere la funzione di prima e ribaltare le
parti negative

→ max: $2\sqrt{2}$ (il vecchio max batte il vecchio min con segno camb)

p.ti di max: $(\pm\sqrt{2}, \sqrt{2})$

→ min: infiniti p.ti di A in cui $y = -|x|$



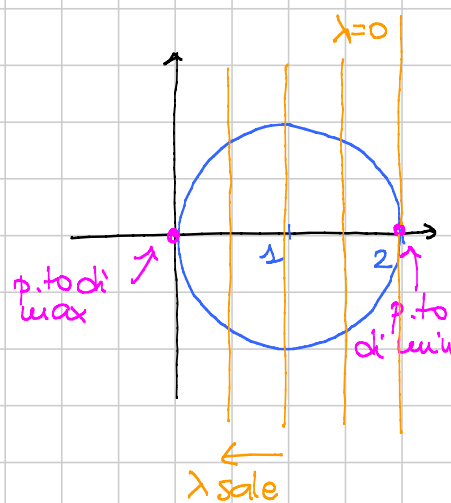
Esempio 5 $f(x,y) = |x-2|$
Insieme: $x^2+y^2 \leq 2x$
 $x^2+y^2-2x+1 \leq 1$
 $(x-1)^2+y^2 \leq 1$

Osserviamo che $x-2 \leq 0$ in A,

per cui $|x-2| = 2-x$

Quindi si tratta di fare

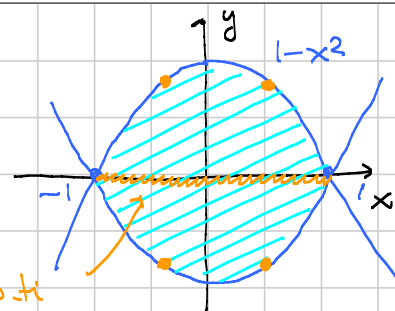
max/min di $2-x$



Esempio 6 $f(x,y) = xy^2$
 Insieme: $x^2 + |y| \leq 1$

Per $y \geq 0$ diventa $x^2 + y \leq 1$, cioè
 $y \leq 1 - x^2$

Osservo che si ha simmetria
 rispetto all'asse x



∞ p.ti
 stab. interni
 dove $f=0$ e quindi
 sono p.ti di min

Step 1 $W \Rightarrow$ max e min esistono

Step 2 Sing.int.: $\emptyset$ Stat cut $\begin{cases} y^2 = 0 \leadsto y = 0 \\ 2xy = 0 \quad x \text{ QUALUNQUE} \end{cases}$

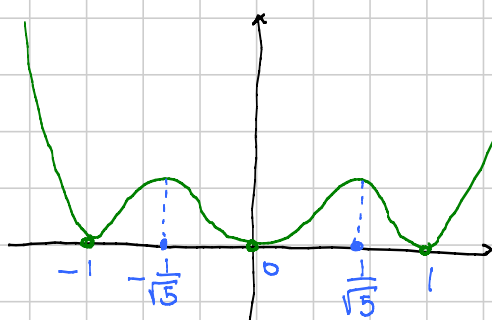
Step 3 Bordo fatto da 2 pezzi di parabola. Qui a scelta possiamo parametrizzare o usare moltiplicatori.

Pezzo alto: $(t, 1-t^2) : t \in [-1, 1] \leadsto \varphi(t) = t(1-t^2)^2$ che devo studiare per $t \in [-1, 1]$

Pezzo basso: $(t, t^2-1) : t \in [-1, 1] \leadsto$ stessa funzione di sopra

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= t(t^2-1)^2 & \varphi'(t) &= (t^2-1)^2 + t \cdot 2(t^2-1) \cdot 2t \\ & & &= (t^2-1)(t^2-1+4t^2) \end{aligned}$$

$$\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1 \text{ oppure } 5t^2 = 1, \text{ cioè } t = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$



[Dopo video: il grafico è corretto per $x \geq 0$ ma ribaltato per $x \leq 0$ (φ è dispari). Questo cambia le conclusioni]
 I corrispondenti p.ti nell'insieme A , e cioè

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{4}{5} \right)$$

sono 4 p.ti di max.

[Ex: interpretare con linee di livello $xy^2 = \lambda \quad y = \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{x}}$]

ANALISI 2

- LEZIONE 12

[In differita per coronavirus]

Note Title

13/03/2020

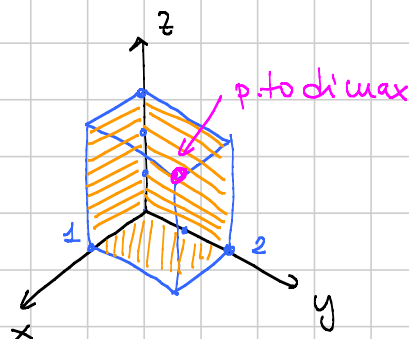
Max / min di funzioni su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$

Esempio 1 $f(x,y,z) = xyz$
 $A = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$

$xyz \geq 0$ in A e vale = se e solo se almeno una delle tre coordinate si annulla

(quindi abbiamo 3 facce interne di punti di min)

$xyz \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ e vale =
 se e solo se $(x,y,z) = (1,2,3)$



Esempio 2 $f(x,y,z) = x + yz$
 Insieme: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ← sfera con centro in $(0,0,0)$ e raggio 2

$W \Rightarrow$ max e min esistono

Stat. int. e sing. int. : $\emptyset$ $\nabla f(x,y,z) = (1, z, y)$

Bordo : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (superf. sfera)

$\leadsto$ moltiplicatori con $\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

1° sistema :

$\Phi_x = 0$	$2x = 0$
$\Phi_y = 0$	$2y = 0$
$\Phi_z = 0$	$2z = 0$
$\Phi = 0$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Nessuna soluz.

2° sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ z = 2\lambda y \\ y = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_x &= \lambda \phi_x \\ f_y &= \lambda \phi_y \\ f_z &= \lambda \phi_z \\ \phi &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} zy &= 2\lambda y^2 \\ yz &= 2\lambda z^2 \end{aligned}$$

$$2\lambda y^2 = 2\lambda z^2$$

$$\lambda(y^2 - z^2) = 0$$

$$\lambda = 0$$

incompatibile
con 1ª eqn

$$y^2 = z^2$$

$$y = \pm z$$

$$y = z$$

$$y = 2\lambda y$$

$$(2\lambda - 1)y = 0$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

$$x = \pm 2$$

$$(\pm 2, 0, 0)$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

$$y = z = \pm\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} (1, \sqrt{3}, \sqrt{3}) \\ (1, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Il ramo con $y = -z$ si tratta
in modo analogo

$$-y = 2\lambda y$$

$$(2\lambda + 1)y = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}$$

$$x = -1$$

$$y = -z = \pm\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} (-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}) \\ (-1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

$$x = \pm 2$$

già visti

[Dopo video: tutte le $\sqrt{3}$ sono in realtà $\sqrt{\frac{3}{2}}$,
il che cambia anche i valori di max/min]

Abbiamo 6 candidati

$$f(2, 0, 0) = 2$$

$$f(-2, 0, 0) = -2$$

$$f(-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}) = f(-1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}) = -1 - 3 = \boxed{-4} \text{ min}$$

$$f(1, \sqrt{3}, \sqrt{3}) = f(1, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 1 + 3 = \boxed{4} \text{ max}$$

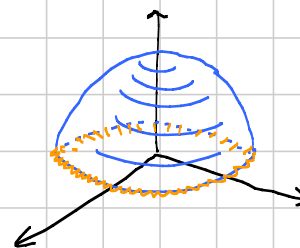
p.ti max

— 0 — 0 —

Esempio 3 $f(x,y,z) = x - 2y + z$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad z \geq 0$$

semisfera alta
(solo "bordo")



$W \Rightarrow$ max e min esistono

Staz. cut. e sing. cut. non hanno senso

Bordo $\leadsto$ moltiplicatori λ a $\rightarrow$ scartare candidati con $z < 0$
 $\rightarrow$ considerare "bordo del bordo"
 o "p.ti di taglio"

1° sistema: NO soluzione

2° sistema:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases} \quad \text{Oss che } \lambda \neq 0 \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2\lambda} \\ y &= -\frac{1}{\lambda} \\ z &= \frac{1}{2\lambda} \end{aligned}$$

Sostituisco nella 4ª equ: $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 6 \quad ; \quad \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^2} = 6$

$\leadsto \frac{1}{\lambda^2} = 4 \quad \leadsto \frac{1}{\lambda} = \pm 2 \quad \leadsto (x,y,z) = (1, -2, 1)$
 $(x,y,z) = (-1, 2, -1)$
 $\uparrow$ NO BUONO

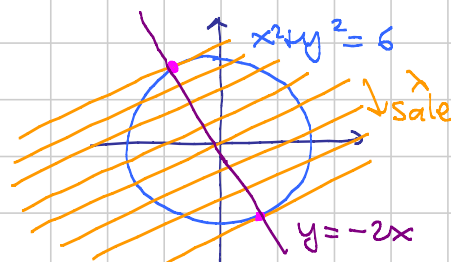
Il secondo candidato deve venire fuori dai p.ti di taglio, cioè i p.ti con

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \quad \text{e} \quad z = 0 \quad x^2 + y^2 = 6$$

su cui devo fare max/min di $x - 2y$ (ho messo $z = 0$)

Ci siamo ridotti ad un pbm. in dim = 2

$$x - 2y = \lambda \quad \leadsto \quad y = \frac{x}{2} - \frac{\lambda}{2}$$



Per trovare i 2 p.ti usiamo a sua volta i moltiplicatori in $\mathbb{R}^2$

2° sistema $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases} \quad \cancel{2}\lambda y = -\cancel{2}(2\lambda x) \quad y = -2x$

$$x^2 + 4x^2 = 6 \quad \leadsto \quad x = \pm \sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$y = \mp 2\sqrt{\frac{6}{5}}$$

Alla fine abbiamo 3 candidati:

$$f(1, -2, 1) = 6 \quad f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}, -2\sqrt{\frac{6}{5}}, 0\right) = 5\sqrt{\frac{6}{5}} = \sqrt{30}$$

p.to di max

max

$$f\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}, 2\sqrt{\frac{6}{5}}, 0\right) = -\sqrt{30}$$

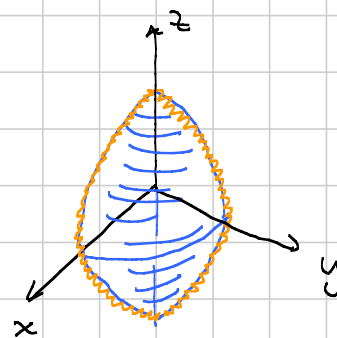
p.to di min.

min

Esempio 4 $f(x, y, z) = x - 2y + z$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$\frac{1}{4}$ di sfera



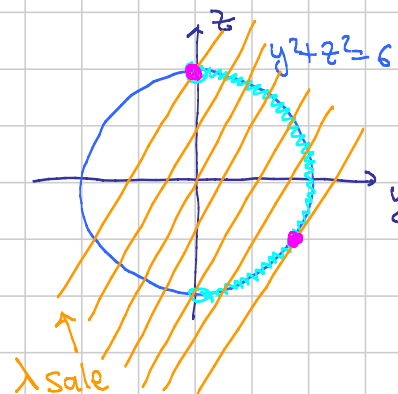
Come prima i moltiplicatori producono $(1, -2, 1)$ e $(-1, 2, 1)$

NO BUONO

Tutto si gioca sui p.ti di taglio, che sono quelli con $x=0$ e quelli con $y=0$

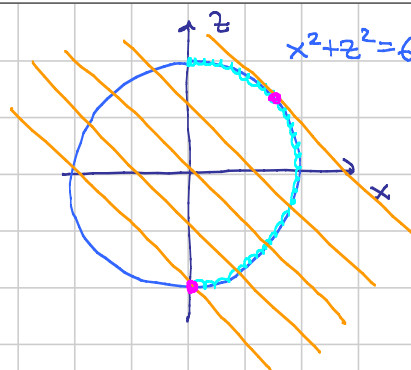
Caso $x=0$ Devo studiare max/min di $-2y+z$ con i vincoli $y^2+z^2=6$ e $y \geq 0$

Con le linee di livello $-2y+z = \lambda$
 $\leadsto z = 2y + \lambda$



Questo produce 2 candidati: $(0, 0, \sqrt{6})$, $(0, 2\sqrt{\frac{6}{5}}, -\sqrt{\frac{6}{5}})$

Caso $y=0$ Devo studiare max/min
di $x+z$ con i vincoli
 $x^2+z^2=6$ e $x \geq 0$



Linee di livello $x+z = \lambda \leadsto z = -x + \lambda$

Questo produce 2 candidati:

$$(0, 0, -\sqrt{6})$$

$$(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$$

Confrontando i valori di $f(x, y, z)$ nei 4 p.ti si trovano
max/min.

Difficoltà della procedura:

- risolvere i sistemi che arrivano dai moltiplicatori
 - capire / gestire gli insiemi di taglio.
- o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 13
[in differita per coronavirus]

Note Title

18/03/2020

Più moltiplicatori di Lagrange (Vedi Lezione 11 di AM2-14)Esempio 1 $f(x, y, z) = xy$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, x^2 + z^2 = 1\}$$

il vincolo è descritto da 2 equazioni

Step 1 Mostriamo che A è compatto (a quel p.to $\Rightarrow$ esistono max e min). Chiuso segue dall'avere condizioni $\geq, \leq, =$.
Mi interessa limitato.

Dalla 1ª equ. deduciamo $|x| \leq \sqrt{2}$ e $|y| \leq \sqrt{2}$. Dalla 2ª: $|z| \leq 1$.
Quindi A è contenuto in un parallelepipedo, quindi ok.

Step 2 Stat. interni e sing. int. non hanno senso, perché A è "solo bordo".

Step 3 Usiamo il metodo con $\phi_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2$
 $\phi_2(x, y) = x^2 + z^2 - 1$

1º sistema $\begin{cases} \text{rank} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & -2z \end{pmatrix} \leq 1 \\ \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3 \text{ equazioni}$

$\begin{matrix} \nearrow y=0 & \xrightarrow{\phi_1} & x = \pm\sqrt{2} & \xrightarrow{xz=0} & z=0 & \xrightarrow{\phi_2} & x = \pm 1 & \text{☹} \\ \searrow z=0 & \xrightarrow{\phi_2} & x = \pm 1 & \xrightarrow{xy=0} & y=0 & \xrightarrow{\phi_1} & x = \pm\sqrt{2} & \text{☹} \end{matrix}$

$$\boxed{2^{\circ} \text{ Sistema}} \quad \begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla \phi_1 + \mu \nabla \phi_2 \\ \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2\lambda x + 2\mu x \\ x = 2\lambda y \\ 0 = -2\mu z \\ x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{[Dopo video]} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{l} \mu z = 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mu = 0 \quad \quad z = 0 \\ \downarrow 1^a \text{ e } 2^a \text{ eq.} \quad \downarrow 5^a \text{ eq.} \\ 2\lambda x^2 = 2\lambda y^2 \quad x = \pm 1 \\ \lambda(x^2 - y^2) = 0 \quad \downarrow 4^a \text{ eq.} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \downarrow \\ x = \pm y \quad \lambda = 0 \quad y = \pm 1 \\ \downarrow 4^a \quad \downarrow 1^a \text{ e } 2^a \text{ eq.} \quad \downarrow \\ x = \pm 1 \quad x = y = 0 \quad \downarrow 5^a \text{ eq.} \\ y = \pm 1 \quad \downarrow 4^a \quad z = 0 \\ \downarrow 5^a \end{array}$$

$(\pm 1, \pm 1, 0)$ 4 p.ti

Conclusione: abbiamo 4 candidati

$$\begin{array}{l} \text{p.ti di max} \\ \rightarrow f(1, 1, 0) = f(-1, -1, 0) = 1 \leftarrow \text{max} \\ f(-1, 1, 0) = f(1, -1, 0) = -1 \leftarrow \text{min} \\ \text{p.ti di min} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Esempio 2}} \quad f(x, y, z) = xy \\ A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, x^2 + z^2 = 1, z \geq \frac{1}{2}\}$$

Compattezza come prima, quindi max/min esistono.

Però tutti i candidati non vanno bene !!!

La condizione aggiunta crea dei "pti di taglio", o "bordi dei bordi" descritti da $x^2 + y^2 = 2, x^2 + z^2 = 1, z = \frac{1}{2}$

Le cond. danno un numero finito di p.ti

$$x^2 = \frac{3}{4} \rightsquigarrow y^2 = \frac{5}{4} \rightsquigarrow \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad 4 \text{ p.ti}$$

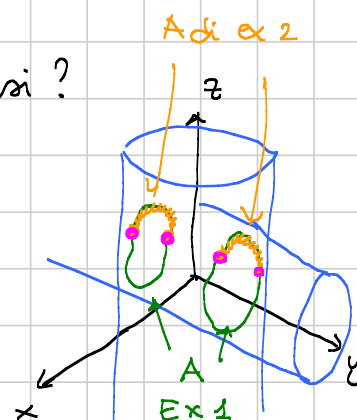
$$\text{Max} = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{min} = f\left(-, +, \frac{1}{2}\right) = f\left(+, -, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

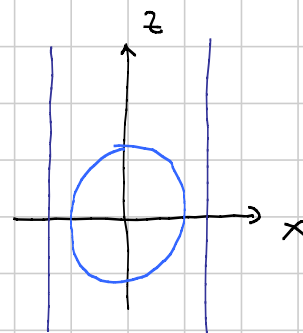
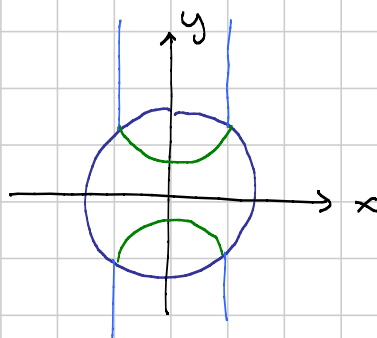
Oss. geom. Come è fatto l'insieme nei 2 casi?

$$x^2 + y^2 = 2 \rightsquigarrow \text{cilindro con asse lungo asse } z \text{ e raggio } \sqrt{2}$$

$$x^2 + z^2 = 1 \rightsquigarrow \text{cilindro con asse lungo asse } y \text{ e raggio } 1$$



Visto dall'alto



Esempio 3 $f(x, y, z) = x - y + z^2$

$$A = \{ \dots : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}}_{\text{sfera } \Phi_1}, \underbrace{x + y = z^2}_{\text{grafico } \Phi_2} \}$$

Step 1 e 2 come prima

Moltiplicatori

1° sistema

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 2z \end{pmatrix}$$

rank ≤ 1

$$\begin{aligned} 4yz - 2z &= 0 \\ z(2y - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4xz - 2z &= 0 \\ z(2x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

$$z(2x-1)=0 \begin{cases} \nearrow z=0 \stackrel{\phi_2}{\sim} y=-x \stackrel{\phi_1}{\sim} x=\pm \frac{1}{2}, y=\mp \frac{1}{2} \sim \text{No buono con } x=y \\ \searrow x=\frac{1}{2}=y \stackrel{\phi_1}{\sim} z=0 \sim \text{incompatibile con } \phi_2 \end{cases}$$

2° sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu \\ -1 = 2\lambda y + \mu \\ 2z = 2\lambda z + 2\mu z \\ \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = 0 \end{cases}$$

$$3^a \text{ equ: } z(\lambda + \mu - 1) = 0$$

$$z=0$$

$$\lambda + \mu = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, y = \mp \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\lambda + \mu = 1 \sim \mu = 1 - \lambda \sim$$

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x + 1 - \lambda \\ -1 &= 2\lambda y + 1 - \lambda \end{aligned}$$

$$\lambda(2x-1)=0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\downarrow \phi_2$$

$$y = z^2 - \frac{1}{2}$$

$$\downarrow \phi_1$$

$$\frac{1}{4} + \left(z^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{2}$$

$$\downarrow z=0$$

$$\text{quindi ancora una volta } \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

Sostituendo saranno p.to di max e p.to di min.

Oss. Potevo semplificare il conto osservando che in A vale $z^2 = x+y$ quindi $f(x, y, z) = x - y + z^2 = 2x$. Questo semplificava il 2° sistema

$$2 = 2\lambda x + \mu$$

$$0 = 2\lambda y + \mu$$

$$0 = 2\lambda z + 2\mu z$$

$$\phi_1 = \phi_2 = 0$$

Questo può essere più facile da risolvere.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 14
[in differita per coronavirus]

Note Title

18/03/2020

Limiti all'infinito per funzioni di 2 variabili (Lez 12 e 13 di AM2-14)
 ↑
 o più

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty \quad (\Leftrightarrow) \quad \forall M \in \mathbb{R} \exists \rho > 0 \text{ t.c.} \\ f(x,y) \geq M \quad \forall (x,y) \text{ t.c. } x^2+y^2 \geq \rho^2$$

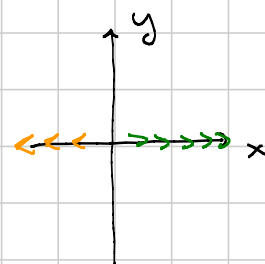
Achtung! In 2 o più variabili non c'è $+\infty$ e $-\infty$

Esempio 1 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x+y)$ non esiste !!

Basta trovare 2 modi di andare all'infinito in cui la funzione si comporta in modo diverso!

$$f(t,0) = t \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = +\infty \quad \blacksquare \\ \text{(semiretta } x \text{ positivo)}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t,0) = -\infty \quad \blacksquare \\ \text{(semiretta } x \text{ negativo)}$$



C'erano tantissimi altri modi di ottenere risultati diversi

Esempio 2 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x+y) \arctan(x-y)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \arctan t = +\infty \quad \blacksquare \\ \text{semiretta } x \text{ positivo} \quad \uparrow \text{ funzione pari}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t,x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t \arctan t = +\infty \quad \blacksquare \\ \text{semiretta } x \text{ negativo}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \arctan(-t) = -\infty \quad \blacksquare$$



il limite non esiste

Esempio 3 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^4 + y^4 + xy = +\infty$

Coordinate polari! $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ In questo modo

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \text{diventa} \lim_{\rho \rightarrow +\infty}$$

$$\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + \rho^2 \cos \theta \sin \theta \geq$$

↑
voglio a dx qualcosa che non dipenda da θ e che tenda a $+\infty$ per $\rho \rightarrow +\infty$

$$\begin{array}{l} \text{oss 1 : } \cos \theta \sin \theta \geq -1 \\ \text{oss 2 : } \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \geq m > 0 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{oss 1} \\ \text{oss 2} \end{array}} \right\} \text{ per ogni } \theta \in [0, 2\pi]$$

↓ solita storia : la funzione è continua in $[0, 2\pi]$, quindi per W. ha min in un p.to θ_0 e quindi $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta \geq \cos^4 \theta_0 + \sin^4 \theta_0 = m > 0$ perché $\cos \theta_0$ e $\sin \theta_0$ non possono essere nulli entrambi

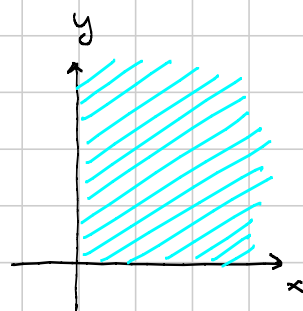
Ora è fatta

$$\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + \rho^2 \cos \theta \sin \theta \geq m \rho^4 - \rho^2 \xrightarrow[\text{per } \rho \rightarrow +\infty]{+} +\infty$$

Esempio 4 (limite con dominio ristretto)

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ x \geq 0, y \geq 0}} (x+y)$$

Ora posso muovermi solo sul 1° quadrante



Dico che fa $+\infty$ e si fa in coord. polari
positive!!

$$x+y = \rho (\cos \theta + \sin \theta) \geq \underbrace{m}_{\geq m > 0} \rho \quad \uparrow \text{ e questo tende a } +\infty$$

(se mi limito al 1° quadrante $\rightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$
per il solito discorso)

Esempio 5 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x^2+y^2+xy) = +\infty$

Coord. polari: $\rho^2 + \rho^2 \cos \theta \sin \theta = \rho^2 (1 + \cos \theta \sin \theta)$

Analisi 1: studiando la funzione di θ si ottiene che $\cos \theta \sin \theta \geq -\frac{1}{2}$ da cui

$$f(x,y) \geq \rho^2 \frac{1}{2} \text{ e quindi tende a } +\infty.$$

Metodo alternativo: farsi venire un'idea 😊

$$x^2+y^2+xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \text{ equivale a } \frac{1}{2}(x^2+y^2+2xy) \geq 0$$

$(x-y)^2$

Così si ottiene ugualmente $f(x,y) \geq \frac{1}{2}\rho^2$

Esempio 6 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^2+y^2+\alpha xy$ al variare di $\alpha \geq 0$

Come prima troviamo $\rho^2 (1 + \alpha \cos \theta \sin \theta) = \rho^2 (1 - \frac{\alpha}{2})$

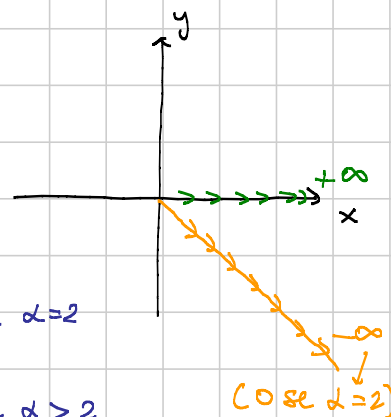
- Se $1 - \frac{\alpha}{2} > 0$, cioè se $\alpha < 2$, allora $\lim = +\infty$
- Se $1 - \frac{\alpha}{2} \leq 0$, cioè se $\alpha \geq 2$, allora il limite non esiste. Per dimostrarlo servono due casi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty \quad \text{☺}$$

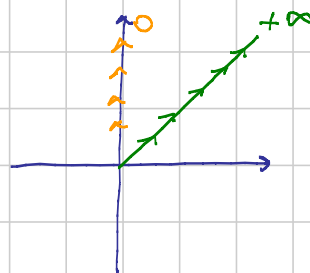
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, -t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 + t^2 - \alpha t^2$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} (2-\alpha)t^2 = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha=2 \\ -\infty & \text{se } \alpha>2 \end{cases}$$

(in ogni caso è diverso da $+\infty$)



Esempio 7 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} xy$ N.E.
 $x \geq 0$
 $y \geq 0$



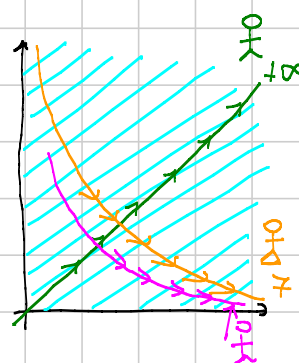
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

Esempio 8 Esattamente come sopra, ma con vincolo $x > 0$ e $y > 0$
 (Questo vieta di scegliere $(t, 0)$ o $(0, t)$)

Da non pensare nemmeno:

$$xy = \rho^2 \underbrace{\cos\theta \sin\theta}_{\substack{\text{ora } \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \text{estremi esclusi,} \\ \text{quindi } u > 0}} \geq u \rho^2 \rightarrow +\infty \quad \text{per } \rho \rightarrow +\infty$$



Infatti $\sup \{ \cos\theta \sin\theta : \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \} = 0$ quindi la disug. di sopra è falsa.

Come prima $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$

Ora $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, \frac{t}{t}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 = 1$

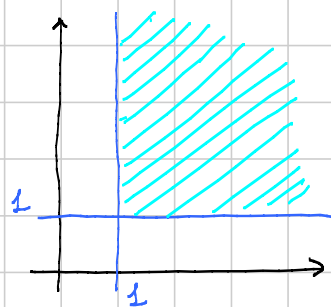
Quindi il limite non esiste

Si può andare a 0? Why not!

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, \frac{1}{t^2}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$$

Esempio 9 Come sopra, con condizioni $x \geq 1$ e $y \geq 1$

Osserviamo che nell'insieme esistono p.ti con θ arbitrariamente vicino a 0 e a $\frac{\pi}{2}$, quindi è ancora che in coord. polari è difficile fare stime.



1° modo Ci inventiamo una disuguaglianza

$xy \geq x$ nella zona e analogamente $xy \geq y$

Sommando otteniamo $2xy \geq x+y$, e quindi

$$xy \geq \frac{1}{2}(x+y)$$

↓ tendeva a $+\infty$ su tutto il 1° quadrante, quindi a maggior ragione sull'insieme ristretto. Conclusione con i carabinieri

Quindi: il limite esiste e fa $+\infty$.

2° modo Cambio di variabili per portare l'origine in (1,1):

$x = u+1$ $y = v+1$. Il limite diventa

$$\lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} (u+1)(v+1) = \lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} (\underbrace{uv}_{\geq 0} + u + v + 1) \quad \text{con il vincolo } u \geq 0 \text{ e } v \geq 0$$

$$\geq \lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} (u+v) = +\infty \quad \text{perché è un es. prec.}$$

Oss. L'idea è stata riportarsi al vero 1° quadrante.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 15
[in differita per coronavirus]

Note Title

18/03/2020

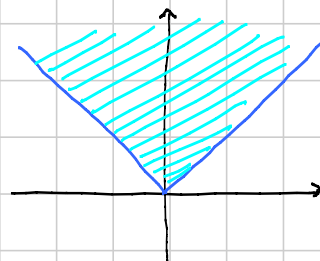
Limiti all'infinito in 2 (o più) variabili

Esempio 1 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{y^6}{1+x^2+y^2}$ NON esiste

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = 0$ (semiasse x positivo)

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^6}{1+t^2} = +\infty$ (semiasse y positivo)

Esempio 2 $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ y \geq |x|}} \frac{y^6}{1+x^2+y^2}$



Idea: ora il limite fa $+\infty$ perché siamo costretti ad usare y "grandi".

1° modo Uso disuguaglianze

$$y^6 \geq y^6 \quad \vee$$

$$y^6 \geq x^6 \quad \text{per condizione } y \geq |x|$$

Sommando: $2y^6 \geq y^6 + x^6$ nella zona data, e quindi

$$\frac{y^6}{1+x^2+y^2} \geq \frac{1}{2} \frac{x^6+y^6}{1+x^2+y^2}$$

Il limite a dx fa $+\infty$ anche su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi a maggior ragione nella zona data. Infatti:

solidi discorsi:
 $z \geq m > 0$

$$\frac{x^6+y^6}{1+x^2+y^2} = \frac{\rho^6 (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)}{1+\rho^2} \geq m \frac{\rho^6}{1+\rho^2} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} +\infty$$

2° modo Coordinate polari dall'inizio

$$\frac{y^6}{1+x^2+y^2} = \frac{\rho^6 \sin^6 \theta}{1+\rho^2} \leftarrow \text{ora } \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \text{ quindi } \sin \theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{8} \frac{\rho^6}{1+\rho^2}$$

Esempio 3 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(xy)}{|x|+|y|+1} = 0$

Trucco valore assoluto + coord. polari

$$\left| \frac{\arctan(xy)}{|x|+|y|+1} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+|x|+|y|} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\rho(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}$$

$\geq m > 0$

$$\leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+m\rho}$$

Esempio 4 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^2+y^4-xy^3$

Esplorazione: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t,0) = +\infty = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(0,t) = +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 + t^4 - t^4 = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 2t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 + 16t^4 - 8t^4) = +\infty$$

Proviamo sulla retta generica $y = ux$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, ut) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 + u^4 t^4 - u^3 t^4) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \left[1 + \frac{u^3(u-1)}{t^2} \right] \end{aligned}$$

negativo se $u \in (0,1)$

Idea! $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, \frac{1}{2}t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 + \frac{1}{16}t^4 - \frac{1}{8}t^4)$

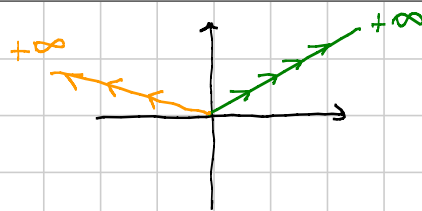
$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 - \frac{1}{16}t^4) = -\infty$$

$\uparrow$ vince !!

Quindi il limite di partenza NON esiste!

— o — o —

Esempio 5 $\lim_{x^4+y^2 \rightarrow +\infty} (x^4+y^6+x^3y)$



Facciamo il conto sulle rette

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^4 + m^6 t^6 + m t^4) = +\infty$$

→ se $m \neq 0$ comanda $m^6 t^6$
 → se $m = 0$, c'è solo t^4

Andare a $+\infty$ su tutte le rette NON basta per concludere.

Coord. polari:

$$\begin{aligned} & p^4 \cos^4 \theta + p^6 \sin^6 \theta + p^4 \sin \theta \cos^3 \theta \\ &= p^6 \sin^6 \theta + p^4 \cos^3 \theta (\cos \theta + \sin \theta) \end{aligned}$$

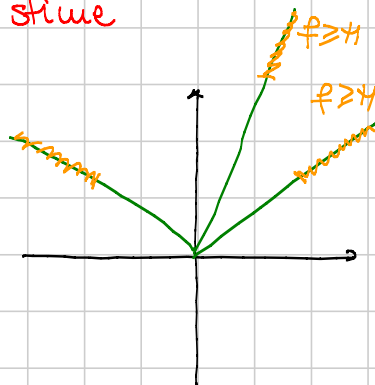
Distinguiamo 2 casi:

→ se $\sin \theta \neq 0$, allora tende a $+\infty$ grazie a $p^6 \sin^6 \theta$

→ se $\sin \theta = 0$, allora resta $p^4 \cos^4 \theta = p^4 \rightarrow +\infty$

Anche questo ragionamento è SPAZZATURA! Pensare θ come un parametro fisso = muoversi sulle rette a θ fisso.

Per avere una dimostrazione occorre trovare stime INDIPENDENTI DA θ .



Geometricamente: fissata una costante M ed una semiretta uscente dall'origine, definitivamente sulla semiretta la funz. diventa $\geq M$.

Mettendo insieme i vari definitivamente, non è detto che si trovi una cond. del tipo $x^2+y^2 \geq r^2$. Ci vorrebbe un r che va bene per tutti i θ !!!

Come uscire?

SLOGAN: pareggiare gli esponenti!!!

$x^4 + y^6 + x^3 y$. Poniamo $x = u^3$ e $y = v^2$. Allora vale

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = \lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} f(u^3, v^2)$$

convincerse
con calma

$$\lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} f(u^3, v^2) = \lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} u^{12} + v^{12} + u^3 v^2$$

Questo in coord. polari diventa

$$\rho^{12} \underbrace{(\cos^{12} \theta + \sin^{12} \theta)}_{\geq u > 0} + \rho^{11} \underbrace{(\cos^9 \theta \sin^2 \theta)}_{\geq -1} \geq \underbrace{u \rho^{12} - \rho^{11}}_{\downarrow +\infty}$$

Questo mostra che il limite originario è $+\infty$!!!

Oss. La dimostrazione fatta in realtà copre solo gli $y \geq 0$.

Bisognerebbe fare a parte il caso $y \leq 0$ ponendo $y = -v^2$.
Alla fine i conti sono gli stessi!

Esempio 6 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x^4 + y^6 + x y^5)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^4 = +\infty, \text{ quindi se esiste il limite è } +\infty.$$

Pareggiando gli esponenti: $x = u^3, y = v^2$

$$x^4 + y^6 + x y^5 = u^{12} + v^{12} + u^3 v^{10}$$

C'è il rischio che comandi
il secondo termine!!!

Basta scegliere $u = t$ e $v = t$ e poi mandare $t \rightarrow -\infty$

Si poteva fare direttamente

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t^3, t^2) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (t^{12} + t^{12} + t^{13}) = -\infty$$

↑ comanda questo!!

Si poteva vedere ragionando sulle rette?

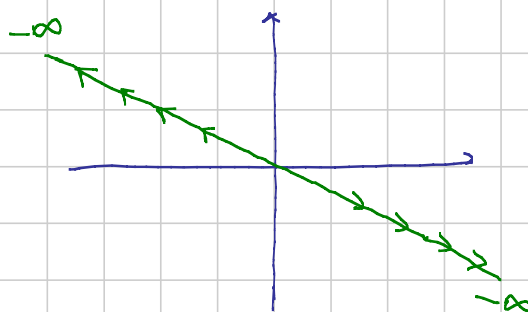
$$f(t, ut) = t^4 + u^6 t^6 + u^5 t^5 = t^4 + t^6 \underbrace{u^5(u+1)}_{\text{negativo per } u \in (-1, 0)} \\ \text{quindi ad esempio per } u = -\frac{1}{2}$$

Domanda: come sarebbe stato

il limite sul solo
1° quadrante?

Sarebbe stato $+\infty$!!!

$$\text{Motivo: } x^4 + y^6 + xy^5 \geq x^4 + y^6 \\ \uparrow \text{ sul 1° quadrante}$$



e il limite a dx fa $+\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Come vederlo?

→ paraggio esponenti e passo in coord. polari

→ Uso disug. del tipo $x^6 \geq x^2 - 1$ e $y^6 \geq y^2 - 1$
(facile analisi ±)

da cui

$$x^4 + y^6 \geq \boxed{x^2 + y^2 - 2} \\ \downarrow \\ +\infty. \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$$

ANALISI 2

LEZIONE 16
[in differita per coronavirus]

Note Title

18/03/2020

Max / min su insiemi non limitati

[Prerequisiti: fino alla lezione 16 di AM2-14]

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y^4$ $A = \mathbb{R}^2$

→ $f(x,y) \geq 0$ sempre con = se e solo se $(x,y) = (0,0)$
quindi

$\min = 0$

p.to di min. = $(0,0)$

→ $\sup = +\infty$, quindi max non esiste (basta considerare
 $f(t,0) = t^2$ con $t \rightarrow +\infty$)

Esempio 2 $f(x,y) = x^2 - y^4$ $A = \mathbb{R}^2$

→ $\sup = +\infty$ $f(t,0)$ con $t \rightarrow +\infty$ (o $t \rightarrow -\infty$)

→ $\inf = -\infty$ $f(0,t)$ con $t \rightarrow +\infty$

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$ $A = \mathbb{R}^2$
 $(x+y)^2$

→ $\min = 0$ e i p.ti di min. sono tutti i p.ti della retta $y = -x$

→ $\sup = +\infty$ $f(t,0)$ con $t \rightarrow \pm\infty$

Esempio 4 $f(x,y) = x^4 + y^2 + x^2y$

Proviamo a pareggiare gli esponenti: $x = u$ e $y = v^2$

$u^4 + v^4 + u^2v^2 \geq 0$

↑
forma quadratiche
nelle variabili u^2 e v^2

In alternativa: $u^4 + v^4 + u^2 v^2 = (u^4 + u^2 v^2 + \frac{1}{4} v^4) + \frac{3}{4} v^4$
 $= (u^2 + \frac{1}{2} v^2)^2 + \frac{3}{4} v^4$

Forse lo potevo vedere dall'inizio:

$$x^4 + y^2 + x^2 y = (x^2 + \frac{1}{2} y)^2 + \frac{3}{4} y^2 \geq 0 \text{ e vale il segno di } = \text{ se e solo se } x=y=0$$

→ $\min = 0$ e pto di min unico: $(0,0)$

→ $\sup = +\infty$ ($f(t,0)$ con $t \rightarrow +\infty$)

Esempio 5 $f(x,y) = x^4 + y^2 + x y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

→ $\sup = +\infty$ [$f(t,0)$ con $t \rightarrow +\infty$]

Paragliamo gli esponenti: $x=u$ e $y=v^2$: $\underbrace{u^4 + v^4}_{\text{grado } 4} + \underbrace{u v^4}_{\text{grado } 5}$

Quindi considero $u=t$ e $v=t$, cioè $x=t$ e $y=t^2$.

$$f(t, t^2) = t^4 + t^4 + t^5 = 2t^4 + t^5 \text{ e per } t \rightarrow -\infty \text{ questo tende a } -\infty$$

→ $\inf = -\infty$ [$f(t, t^2)$ con $t \rightarrow -\infty$]

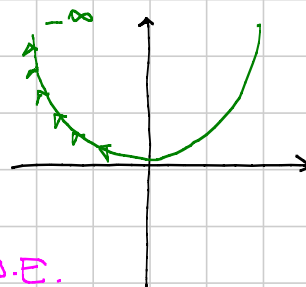
Oss. Lo stesso procedimento mostra che $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x^4 + y^2 + x y^2) \text{ N.E.}$

Si voleva facendo il limite sulle rette?

$$f(t, mt) = t^4 + m^2 t^2 + m^2 t^3$$

e questo tende sempre a $+\infty$ quando $t \rightarrow \pm\infty$

Il limite su tutte le rette fa $+\infty$, ma globalm. N.E.



Esempio 6 $f(x,y) = \underbrace{x^4 + y^4}_{\rho^4} + \underbrace{81xy}_{\rho^2}$ $A = \mathbb{R}^2$

→ $\sup = +\infty$ [$f(t,0)$ con $t \rightarrow +\infty$: provare altre strade !!!!]

→ speriamo che esista $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$.

Se accade questo, allora per Weierstrass generalizzato (IMPORTANTISSIMO) il min. esiste per forza.

Il limite si fa in coord. polari con le solite storie...

Visto che il min. esiste, sarà per forza in un p.to stazionario (sing. non ce ne sono e bordo nemmeno). Troviamoli!

$$\begin{cases} 4x^3 + 81y = 0 \\ 4y^3 + 81x = 0 \end{cases} \quad y = -\frac{4}{81}x^3 = -\frac{2^2}{3^4}x^3$$

$$4\left(-\frac{2^6}{3^{12}}x^9\right) + 81x = 0 \quad \times \left[3^4 - \frac{2^8}{3^{12}}x^8\right] = 0$$

$$x=0 \leadsto y=0$$

$$x^8 = \frac{3^{16}}{2^8} \leadsto x = \pm \frac{9}{2} \leadsto y = \mp \frac{4}{81} \frac{9 \cdot 81}{8} = \mp \frac{9}{2}$$

Dal sistema abbiamo ottenuto 3 p.ti stazionari

$$f(0,0) = 0$$

$$f\left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right) = f\left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = \underbrace{\left(\frac{9}{2}\right)^4 \cdot 2 - 81\left(\frac{9}{2}\right)^2}_{\text{Questo è il minimo}} < 0$$

↑ ↑
due p.ti di minimo

Esempio 7 $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2+1}$ $A = \mathbb{R}^2$

Che aria tira? $\sim \frac{e^2}{e^2+1}$, quindi c'è possibilità di limite finito all'infinito.

→ $\min = 0$, p.ti di $\min =$ tutto l'asse y

$f(x,y) \geq 0$ sempre con $=$ se e solo se $x=0$ (asse y)

Domanda: esiste $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y)$? NO ☹️

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{t^2+1} = 1$$

ci dice che $\sup/\max$ saranno ≥ 1

→ $\sup \geq 1$ e $\max$ non esiste. Bisogna fare 3 cose:

- $f(x,y) \leq 1$ sempre $\frac{x^2}{x^2+y^2+1} \leq 1$ (tutto ≥ 0 con $\text{denom} \geq \text{numeratore}$)
(finora $\sup \leq 1$)

- $f(x,y)$ non è mai uguale a 1: $\frac{x^2}{x^2+y^2+1} = 1 \leadsto$ moltiplico e viene annullato

- $f(x,y)$ si può avvicinare quanto vuole a 1

(Basta prendere $f(t,0)$ con $t \rightarrow +\infty$)

Ora $\sup = 1$ e $\max$ non esiste.

Tecnica generale: per dimostrare che $\sup = 34$ bisogna

- far vedere che $f(x,y) \leq 34$ sempre
- mostrare che $f(x,y)$ si avvicina quanto vuole a 34 (con $\frac{9}{2}$)

Esempio 8 $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2+1}$

$\sim \frac{1}{\rho^2}$ all'infinito,
quindi forse $\lim = 0$.

- Con le coord. polari si dimostra (farlo!) che

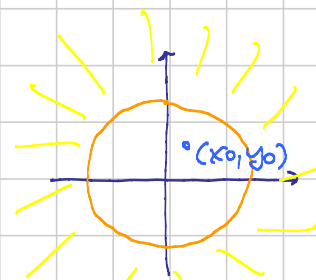
$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} f(x,y) = 0$$

- Si osserva che esiste (x_0, y_0) t.c. $f(x_0, y_0) > 0$ (ad esempio $(x_0, y_0) = (1, 1)$)

Da queste 2 osservazioni (per W. generalizzato) segue che $f(x,y)$ ammette max in $\mathbb{R}^2$

[Per def. di limite, esiste $r > 0$ t.c.

$$f(x,y) \leq \frac{1}{2} f(x_0, y_0) \quad \text{se } x^2+y^2 \geq r^2$$



qui $f \leq \frac{1}{2} f(x_0, y_0)$

Per W normale, $f(x,y)$ ammette max in $x^2+y^2 \leq r^2$.

Dico che questo max è max su tutto $\mathbb{R}^2$. Infatti

- batte i pti nella palla perché è il max lì
- batte i pti fuori perché è $\geq f(x_0, y_0)$ e questo è maggiore stretto dei valori fuori dalla palla]

Una volta che sappiamo che max esiste, non resta che calcolare i pti stazionari

$$\frac{x^2+y^2+1-2x^2}{()^2} = 0$$

↓
 $x = \pm 1$

$$-\frac{2y}{()^2} = 0$$

↓
 $y = 0$

pto di max

$$\leadsto (1, 0) \text{ e } (-1, 0)$$

↑
pto di min.

[min esiste per lo stesso motivo, oppure osservando che $f(x,y)$ è DISPARI nella variabile x]

Esempio 8 $f(x, y) = x^2 + \arctan(xy)$ $A = \mathbb{R}^2$

→ $\sup = +\infty$ [$f(t, 0)$ con $t \rightarrow \pm\infty$]

→ $\inf = -\frac{\pi}{2}$ e non è min. Servono 3 verifiche, analoghe a esempio prec.

① $f(x, y) \geq -\frac{\pi}{2}$ sempre [$x^2 \geq 0$, $\arctan(\text{qualcosa}) \geq -\frac{\pi}{2}$]

Questo dice che $\inf \geq -\frac{\pi}{2}$

② $f(x, y) = -\frac{\pi}{2}$ mai [dovrebbe essere $x=0$ e $\arctan = -\frac{\pi}{2}$]

Questo dice che SE $\inf = -\frac{\pi}{2}$, allora non è min.

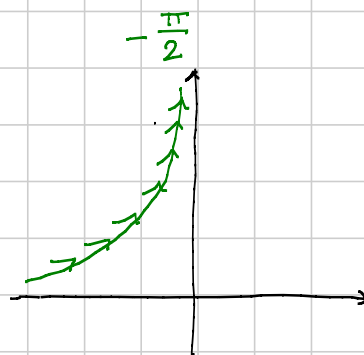
③ $f(x, y)$ può avvicinarsi a piacere a $-\frac{\pi}{2}$!!

Se $x \sim 0$ e $xy \sim -\infty$

$$f\left(\frac{1}{t}, t^2\right) = \frac{1}{t^2} + \arctan t$$

Ora basta mandare $t \rightarrow -\infty$!!!

[è come dire $y = \frac{1}{x^2}$ con $x \rightarrow 0^-$]



[Provare a vedere grafici con computer !!!]

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 17

[In differita per coronavirus]

Note Title

20/03/2020

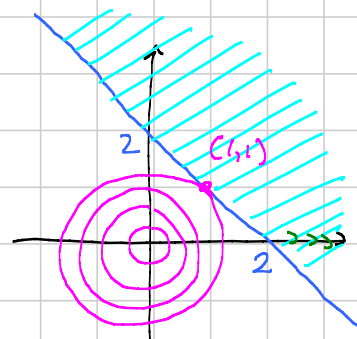
Max - min su insiemi non limitati

Esempio 1

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 2\}$$

→ $\sup = +\infty$ $f(t, 0)$ con $t \rightarrow +\infty$
(per t grande $(t, 0) \in A$)



→ min esiste per W. generalizzato visto che $f(x, y) \rightarrow +\infty$ per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ (su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi a magg. ragione in A)

Gli eventuali p.ti di min :

- sing. o stat. interni (in questo caso NO)
- sul bordo, cioè sulla retta $y = 2 - x$ ← parametrizz. del vincolo
 $\varphi(t) = f(t, 2-t) = t^2 + (2-t)^2 = t^2 + 4 - 4t + t^2 = 2t^2 - 4t + 4$
 $\varphi'(t) = 4t - 4$ si annulla per $t = 1$. Quindi $(1, 1)$ è p.to di min e il valore minimo è 2

Oss. Si vedeva bene con le linee di livello.

Oss. Si poteva trattare il bordo con i moltiplicatori

$$\phi(x, y) = x + y - 2$$

1° sistema $\leadsto$ no soluzione $\nabla \phi = (1, 1)$

2° sistema $\nabla f = \lambda \nabla \phi$

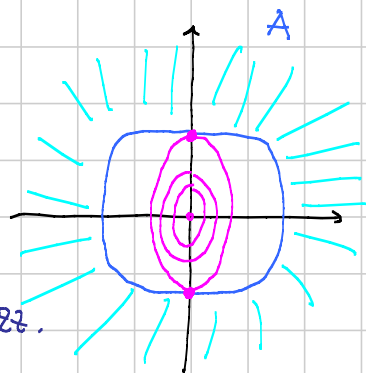
$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = \lambda \\ x + y = 2 \end{cases} \leadsto x = y \text{ e poi è storia.}$$

— o — o —

Esempio 2 $f(x,y) = 2x^2 + y^2$
 $A = \{ \dots : x^4 + y^4 \geq 1 \}$

$\rightarrow \sup = +\infty \quad f(t,t) \text{ con } t \rightarrow +\infty$

$\rightarrow \inf = \min$ e questo esiste per W generalizz.
 (basta fare $\lim$ all' ∞ di $f(x,y)$)



Staz. e sing. interni non ci sono $\nabla f = (4x, 2y)$ si annulla solo in $(0,0)$

Quindi il $\min$ è sul bordo, che trattiamo con moltiplicatori con
 $\Phi(x,y) = x^4 + y^4 - 1$.

1° sistema $\leadsto$ NO SOL.

2° sistema
$$\begin{cases} 4x = 4\lambda x^3 & -y & 4xy = 4\lambda x^3 y \\ 2y = 4\lambda y^3 & -2x & 4xy = 8\lambda y^3 x \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

$\lambda x^3 y = 2\lambda y^3 x \quad \lambda xy(2y^2 - x^2)$ si aprono 4 opzioni

$\lambda = 0 \leadsto x=y=0$ NO BUONO con 3°

$x=0 \leadsto (0, \pm 1)$

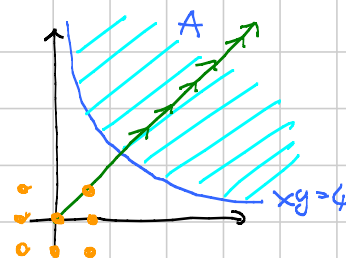
$y=0 \leadsto (\pm 1, 0)$

$2y^2 = x^2 \leadsto 4y^4 = x^4 \leadsto 5y^4 = 1 \leadsto y = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \quad 4 \text{ pti}$
 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}$

Confrontando i valori di f negli 8 pti trovati abbiamo il
 minimo. [FARLO!]

L'esame delle linee di livello suggerisce che vincano $(0, \pm 1)$.

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^4 - y^4$
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, xy \geq 4\}$



$\rightarrow \inf = -\infty \quad f(t,t) = 2t^2 - 2t^4$ poi $t \rightarrow +\infty$

$\rightarrow \sup = \max$ che esiste per W.gen. in quanto

$f(x,y) \rightarrow -\infty$ per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$

(motivo: $f(x,y) \sim \rho^2 - \rho^4$) $\leftarrow$ formalizzare il discorso in coord. polari

Ricerca pti di max.

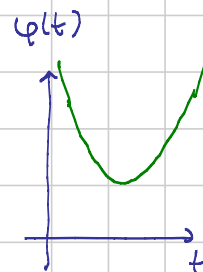
• sing. int. : $\emptyset$

• stat. int. : $2x - 4x^3 = 0 \quad x(1 - 2x^2) = 0 \quad x=0 \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $2y - 4y^3 = 0 \quad y(1 - 2y^2) = 0 \quad y=0 \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Domanda: quanti sono i p.ti stazionari? Sono 9, ma tutti fuori dall'insieme A.

• bordo, che possiamo trattare in 2 modi

$\rightarrow$ param. $\varphi(t) = f\left(t, \frac{4}{t}\right) = t^2 + \frac{16}{t^2} - t^4 - \frac{256}{t^4}$
e ora bisogna studiare la funzione per $t > 0$



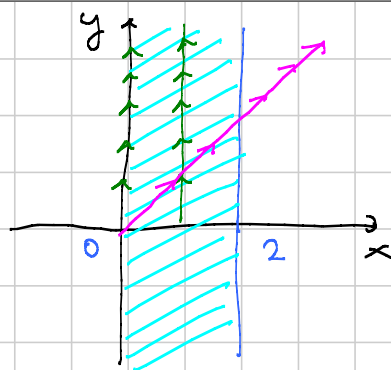
$\rightarrow$ usare moltiplicatori con $\phi(x,y) = xy - 4$

$$\begin{cases} 2x - 4x^3 = \lambda y & \cdot x \\ 2y - 4y^3 = \lambda x & \cdot y \\ xy = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 4x^4 = 2y^2 - 4y^4 \\ y = \frac{4}{x} \end{cases} \rightarrow \text{sostituisco e spero di saper risolvere}$$

Oss. Non ho risolto il 1° sistema, ma non aveva soluzioni

Quando si risolve il 2° sistema, non è davvero necessario trovare il valore di λ , basta trovare i corrispondenti x e y , perché sono loro che vanno sostituiti in f .

Esempio 4 $f(x,y) = x^2 - 7xy + y^2$
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2]\}$
 $= [0,2] \times \mathbb{R}$



$\rightarrow \sup = +\infty \quad f(0,t) = t^2 \text{ con } t \rightarrow +\infty$
 Potero anche fare $f(1,t) = t^2 - 7t + 1$
 con $t \rightarrow +\infty$

$\rightarrow$ Se sapessimo che $f(x,y) \rightarrow +\infty$ per $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$ in A , avremmo gratis l'esistenza del min. per W. generalizzato.

Speranza : $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$, ma questo è
 FALSO

$f(t,t) = -5t^2 \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow +\infty$

Quindi bisogna usare che siamo in A .

$$x^2 - 7xy + y^2 \geq x^2 + y^2 - 14y$$

$\uparrow$
 $x \text{ al max}$
 $\text{è } 2$

$$x^2 - 7xy + y^2 \geq \underbrace{x^2 + y^2 - 14|y|}_{g(x,y)}$$

$\leftarrow$ Occhio : questa non è corretta se y è negativo (provare $x=0$ e $y=-1$)

$$-7xy \geq -7|x| \cdot |y|$$

$$x \leq 2 \Rightarrow |x| \leq 2$$

moltiplico per -7 e riporto

$$-7|x| \geq -14$$

moltiplico per $|y| \geq 0$ e

conservo $-7|x| \cdot |y| \geq -14|y|$

Ora $g(x,y) \rightarrow +\infty$ per $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$
 su tutto $\mathbb{R}^2$, dunque a

maggiore ragione in A

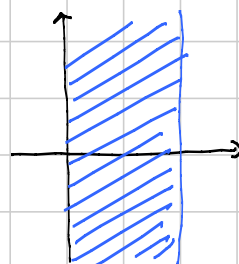
(in coord. polari diventa $\rho^2 - 14\rho|\sin\theta| \geq \rho^2 - 14\rho \rightarrow +\infty$)

Quindi ho concluso per i carabinieri.

Esempio 5 Sia A come nell'esempio precedente.

Calcolare

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} y^2 - 27xy - x^{2020}$$



$$y^2 - 27xy - x^{2020} = x^2 + y^2 - 27xy - x^{2020} - x^2$$

$$\geq x^2 + y^2 - 54|y| - 2^{2020} - 4$$

quando passiamo in coord.
polari abbiamo ρ^2 contro
roba di grado inferiore,
quindi $\rightarrow +\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$.

— o — o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 18

[In differita per coronavirus]

Note Title

20/03/2020

Esempio 1 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 + xyz$ $A = \mathbb{R}^3$

$\rightarrow \sup = +\infty$ $f(t, 0, 0) = t^2$ e poi $t \rightarrow +\infty$

Cerco di capire come si comporta all' ∞ (se tendesse a $+\infty$, allora per W. gen...)

Provo un omino che ponggi gli esponenti

$$f(t^3, t^3, t) = 3t^4 + t^5$$

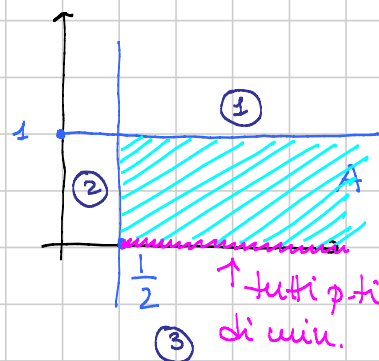
Se mando $t \rightarrow -\infty$ ottengo $\lim = -\infty$

Questo dice 2 cose: • $\lim$ all' ∞ non esiste

• $\inf = -\infty$ su tutto $\mathbb{R}^3$

Esempio 2 $f(x, y) = \frac{xy^2}{1+x^2+y^2}$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1\}$$



$\rightarrow \sup = \inf = 0$. Infatti

$f(x, y) \geq 0$ in A e vale = se e solo se $y = 0$

$\rightarrow$ vediamo se esiste il limite all'infinito

$$\boxed{0} \leq \frac{xy^2}{1+x^2+y^2} \leq \frac{x}{1+x^2+y^2} = \frac{\rho \cos \theta}{1+\rho^2} \leq \frac{\rho}{1+\rho^2}$$

$\downarrow$ 0 in A $\downarrow$ 0 su tutto $\mathbb{R}^2$

$\uparrow$ solo in A perché disug. di destra vale solo in A

→ Dal limite e dall'esistenza di $(x_0, y_0) \in A$ t.c. $f(x_0, y_0) > 0$ segue per W. gen. l'esistenza del max, che può stare nelle solite 3 categorie

• sing. interni : $\emptyset$

• stat. interni :

$$\frac{y^2(1+x^2+y^2) - 2x \cdot xy^2}{(\quad)^2} = 0$$

$$\frac{2xy(1+x^2+y^2) - 2y \cdot xy^2}{(\quad)^2} = 0$$

$$\begin{cases} y^2 + x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 = 0 \\ 2xy + 2x^3y + 2xy^3 - 2xy^3 = 0 \end{cases}$$

$$y^2 + y^4 - x^2y^2 = 0$$

$$xy(1+x^2) = 0$$

$$\downarrow$$

 $x=0$

$$\downarrow$$

 $y=0$

$$\downarrow$$

 $x^2 = -1$

Nulla di interno

NULLA

• Bordo, che è fatto di 3 pezzi

③ Sono tutti p.ti di min

① $(t, 1)$ con $t \geq \frac{1}{2}$ $\varphi_1(t, 1) = \frac{t}{2+t^2}$ che devo studiare per $t \geq \frac{1}{2}$

... il p.to di max si calcola

② $(\frac{1}{2}, t)$ con $t \in [0, 1]$:

$$\varphi_2\left(\frac{1}{2}, t\right) = \frac{\frac{1}{2}t^2}{1 + \frac{1}{4} + t^2}$$

e anche questa si studia
(ci interessa $t \in [0, 1]$)
(forse è pure crescente: provare!)



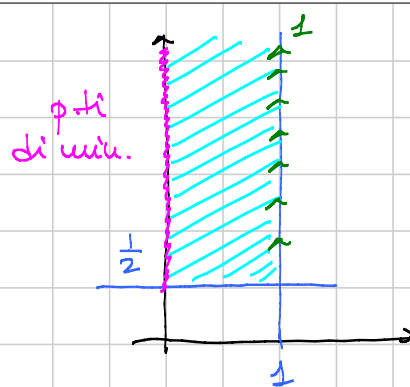
La battaglia per il max su A si gioca tra i 2 max sui pezzi ① e ②.

— o — o —

Esempio 3 $f(x,y) = \frac{xy^2}{1+x^2+y^2}$

$$A = [0,1] \times [\frac{1}{2}, +\infty)$$

→ come prima $\min = 0$ e i p.ti di $\min$ sono quelli sull'asse y



→ il limite per $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$ in A non esiste

↑ guais: niente w. generalizzato

$$f(0,t) = 0 \quad (\text{sembrasse } y \text{ positivo})$$

$$f(1,t) = \frac{t^2}{2+t^2} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

→ proviamo a dimostrare che $\frac{1}{2}$ è il $\sup$, ma non è il $\max$ Senz'altro le solite 3 verifiche

• $f(x,y) \leq \frac{1}{2}$ in A $\frac{xy^2}{1+x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow xy^2 \leq \frac{1}{2}(1+x^2+y^2)$

vera perché $xy^2 \leq y^2 \leq \frac{1}{2}(1+x^2+y^2)$
 $\uparrow$
 $x \leq 1$

• Posso avvicinarmi a $\frac{1}{2}$ quanto voglio (limite di sopra)

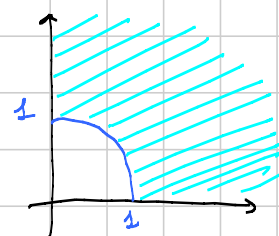
• $f(x,y) = \frac{1}{2}$ è impossibile in A

(Basta osservare che nell'angolo di sopra l'ultima disug. è sempre stretta).

Esempio 4 $f(x,y) = (x-y)e^{-(x+y)}$

→ $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in A}} f(x,y) = 0$. Coord. polari

$$\begin{aligned} & \geq m > 0 \\ & -p(\cos\theta + \sin\theta) \end{aligned}$$



in A (qui uso che $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$)

$$0 \leq |f(x,y)| = p |\cos\theta - \sin\theta| e^{-p}$$

$$\leq p \cdot 2 \cdot e^{-mp} \rightarrow 0 \text{ per } p \rightarrow +\infty$$

Nota bene: il limite non esisterebbe se fossimo su tutto $\mathbb{R}^2$

$$f(t,0) = t e^{-t} \rightarrow -\infty \text{ per } t \rightarrow -\infty$$

$$f(0,t) = -t e^{-t} \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow -\infty$$

Questo ci dice che su tutto $\mathbb{R}^2$ si ha $\sup = +\infty$ e $\inf = -\infty$.

Back to esempio 4

→ esistono p.ti in A in cui $f > 0$ e p.ti in cui $f < 0$
(1,0) (0,1)

quindi per W. gen. max e min esistono.

• sing. int.: $\emptyset$

• stat. int.: $e^{-(x+y)} + (x-y)(-e^{-(x+y)}) = 0$

$$-e^{-(x+y)} + (x-y)(-e^{-(x+y)}) = 0$$

$$e^{-(x+y)}(1-x+y) = 0$$

$$e^{-(x+y)}(-1-x+y) = 0$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow \text{nessun p.to stazionario}$$

• bordo, che è fatto da 3 pezzi

$$f(t,0) = t e^{-t} \text{ per } t \geq 1 \text{ si studia facilmente}$$



$$f(0,t) = -t e^{-t} \text{ per } t \geq 1 \text{ (uguale a sopra)}$$

arco di circonferenza, che possiamo studiare parametrizzando

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta - \sin\theta) e^{-(\cos\theta + \sin\theta)} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

[Provare !!]

oppure con i moltiplicatori

$$\begin{cases} e^{-(x+y)} (1-x+y) = 2\lambda x & \cdot y \\ e^{-(x+y)} (-1-x+y) = 2\lambda y & \cdot x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Moltiplico e semplifico $e^{\dots}$ e ottengo $y(1-x+y) = x(-1-x+y)$

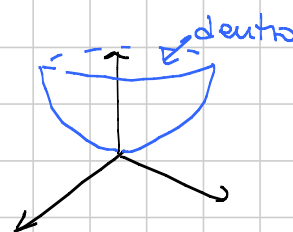
$$y - xy + y^2 = -x - x^2 + xy \quad \leadsto \quad x^2 + y^2 - 2xy = -(x+y)$$

$$\underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0} = \underbrace{-(x+y)}_{\leq 0 \text{ in } A}$$

L'unica possibilità è $x=y=0$, che non sta in A .

Quindi se la giochiamo max/min sui 2 tratti rettilinei.

Esempio 5 $f(x, y, z) = x + y + z$
 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2\}$



• $\sup = +\infty$ $f(0, 0, t) = t \rightarrow +\infty$

- Spero che il limite all'infinito faccia $+\infty$ (restando in A) a quel pto il min esiste. [Morale: in A z comanda!]

Una volta che il min esiste, non è all'interno, quindi è sul bordo e si trova facilmente con i moltiplicatori

Allenamento: z tende a $+\infty$ su A

$z \geq x^2 + y^2$ ma non basta

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq z + z^2$$

$\uparrow$
in A

Questo dimostra che $z^2 + z \rightarrow +\infty$ in A, da cui è abbastanza intuitivo che $z \rightarrow +\infty$.

Volendo essere + precisi:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq z + z^2 \leq 1 + 2z^2$$

$\uparrow$
 $z \leq z^2 + 1$

da cui

$$z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{2}}$$

$\nwarrow$ tende a $+\infty$ in A

$\nearrow$ tende a $+\infty$ su $\mathbb{R}^3$

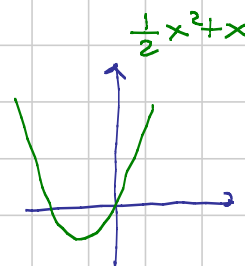
Qui abbiamo usato che stiamo in A

Caso generale

$$\begin{aligned} z + x + y &= \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + x + y \\ &\geq \frac{1}{2} \sqrt{\text{roba di prima}} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 + x + y \\ &\geq \frac{1}{2} \sqrt{\text{roba di prima}} - \text{costante} \end{aligned}$$

dove ho usato che $\frac{1}{2}x^2 + x$ e $\frac{1}{2}y^2 + y$ sono limitate dal basso

— o — o —



ANALISI 2

LEZIONE 19

[in differita per coronavirus]

Note Title

22/03/2020

Sviluppi di Taylor in più variabili (vedi lezione 18 di AM2-14)Esempio 1 $f(x,y) = \sin(xy)$ Taylor di ordine 8
centrato in $(0,0)$ SLOGAN: USARE GLI SVILUPPI DI ANALISI 1 (vedi les. AM1)

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \quad \text{ma anche} \quad \sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)$$

per $t \rightarrow 0$

come numeri

come vettore

Ora osserviamo che $xy \xrightarrow{\text{come numeri}} 0$ per $(x,y) \xrightarrow{\text{come vettore}} (0,0)$.Ponendo $t = xy$ troviamo

$$\sin(xy) = xy - \frac{1}{6}x^3y^3 + o(x^4y^4)$$

↑
grado 8ordine dello
sviluppoAlla fine in uno sviluppo di Taylor ci vuole $o(\|(x,y)\|^n)$ Quello che sta tendendo a 0 è la distanza
di (x,y) da $(0,0)$.

nel nostro caso

$$(\sqrt{x^2+y^2})^8 = (x^2+y^2)^4$$

$$= \boxed{p^8}$$

Osservazione chiave: $o(x^4y^4) = o((x^2+y^2)^4)$

Dando per buona l'oss. chiave abbiamo ottenuto

$$\sin(xy) = xy - \frac{1}{6}x^3y^3 + o((x^2+y^2)^4)$$

↑
questo è p^8

Giustificiamo il punto chiave. Cosa vuol dire $o(x^4y^4)$?
Vuol dire

$$x^4y^4 \underbrace{\omega(xy)}_{\downarrow \text{ tende a 0 quando l'argomento tende a 0}}$$

$$x^4y^4 \omega(xy) = (x^2+y^2)^4 \underbrace{\frac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^4} \omega(xy)}_{\omega_1(x,y)} \quad [\text{Esponente corretto dopo video}]$$

Dico che $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \omega_1(x,y) = 0$ come limite in 2 variabili.

Questo segue da:

$$\underbrace{\frac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^4}}_{\downarrow} \underbrace{\omega(xy)}_{\downarrow \text{ quando } (x,y) \rightarrow (0,0)}$$

[Esponente corretto dopo video]

limitata, perché in coordinate polari diventa

~~roba trigonometrica~~

Questo completa la dimostrazione.

Fatto generale $o(x^a y^b) = o(\|(x,y)\|^{a+b})$ con la stessa dim
(a e b sono interi ≥ 0)
o anche reali ≥ 0

quindi ad esempio

$$o(x^3 y^7) = o((x^2+y^2)^5)$$

$$o(x^7 y^6) = o((x^2+y^2)^{\frac{13}{2}})$$

$$\sin(xy) = xy - \frac{1}{6} x^3 y^3 + o((x^2+y^2)^{\frac{9}{2}})$$

(il termine successivo sarebbe di grado 10)

Esempio 2 $f(x, y) = \cos(x^2) \cdot e^{xy^2}$ grado 8

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^5)$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{24} x^8 + o(x^{10})$$

volevamo

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$e^{xy^2} = 1 + xy^2 + \frac{1}{2} x^2 y^4 + o((x^2 + y^2)^4)$$

↑ il termine successivo sarebbe di grado 9

E' come se fossi partito da

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^{\frac{8}{3}})$$

$$e^{xy^2} = 1 + xy^2 + \frac{1}{2} x^2 y^4 + o(x^{\frac{8}{3}} y^{\frac{16}{3}})$$

↑ la somma degli esponenti è 8.

Mettendo insieme

$$\begin{aligned} \cos(x^2) \cdot e^{xy^2} &= \left(1 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{24} x^8\right) \left(1 + xy^2 + \frac{1}{2} x^2 y^4\right) + o(p^8) \\ &= 1 + xy^2 + \frac{1}{2} x^2 y^4 - \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{2} x^5 y^2 + \frac{1}{24} x^8 \\ &\quad + o((x^2 + y^2)^4) \end{aligned}$$

Esempio 3 Calcolare, data la funzione f precedente, $f_{xx}(0,0)$, $f_{xyy}(0,0)$, $f_{xxy}(0,0)$

1° modo Fare tutti i conti (e con i prodotti è piacevole!)

2° modo Ricordare la formula per i polinomi di Taylor.

Dalla teoria sappiamo che

$$f(x,y) = f(0,0)$$

grado 0

$$+ f_x(0,0)x + f_y(0,0)y$$

grado 1

$$+ \frac{1}{2!} (f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2)$$

specie di quadrato del binomio

grado 2

Fattoriale →

$$+ \frac{1}{3!} (f_{xxx}x^3 + 3f_{xxy}x^2y + 3f_{xyy}xy^2 + f_{yyy}y^3)$$

cubo del binomio (tutte le derivate sono calcolate in (0,0))

Conseguenza importante:

- il coeff. di x^2 nel polinomio è $\frac{1}{2} f_{xx}(0,0)$. Nel nostro caso x^2 "non c'è", cioè ha coeff. 0, dunque $f_{xx}(0,0) = 0$.

- il coeff. di xy^2 nel polinomio è $\frac{3}{3!} f_{xyy}(0,0) = \frac{1}{2} f_{xyy}(0,0)$

Nel nostro caso il coeff. è 1, dunque $f_{xyy}(0,0) = 2$.

- Analogamente a sopra $f_{xxy}(0,0) = 0$ perché x^2y "non c'è".

Chi sarebbe il coeff. di x^5y^2 ?

$$\dots \frac{1}{7!} \left(\frac{\partial^7 f}{\partial x^7} (0,0) x^7 + 7 \frac{\partial^7 f}{\partial x^6 \partial y} (0,0) x^6 y + \dots \right. \\ \left. + 21 \frac{\partial^7 f}{\partial x^5 \partial y^2} (0,0) x^5 y^2 + \dots \right)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 21 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Quindi il coeff. è $\frac{21}{7!} \frac{\partial^7 f}{\partial x^5 \partial y^2} (0,0) = -\frac{1}{2}$

da cui ricavo la derivata.

— 0 — 0 —

Achtung! Dallo sviluppo in (0,0) posso dedurre SOLO i valori delle derivate in (0,0) !!! e non in altri punti.

Esempio 4 $f(x,y) = \sin(x^2+y^5)$ ordine 8

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4) \quad \text{osserviamo che } x^2+y^5 \rightarrow 0 \text{ quando } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

$$\begin{aligned} \sin(x^2+y^5) &= x^2+y^5 - \frac{1}{6}(x^2+y^5)^3 + o(\underbrace{(x^2+y^5)^4}_{\text{tutte potenze con esponente} \geq 8}) \\ &= x^2+y^5 - \frac{1}{6}x^6 + o((x^2+y^2)^8) \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}$
 unico termine del cubo
 che sopravvive: gli altri
 hanno grado ≥ 8 e
 quindi finiscono in o piccolo

Quanto fa $f_{xy}(0,0)$? viene 0, perché xy "non c'è"

Idem per tutte le derivate parziali di ordine 4 o 7 o 8.

Esempio 5 $\arctan(x+y^2) \sin(x^2y)$ ordine 8

$$\sin(x^2y) = x^2y + o((x^2+y^2)^4) \quad (\text{il termine succ. avrebbe grado 9})$$

$$\begin{aligned} \arctan(x+y^2) &= (x+y^2) - \frac{1}{3}(x+y^2)^3 + \frac{1}{5}(x+y^2)^5 + o((x^2+y^2)^{5/2}) \\ &= x+y^2 - \frac{1}{3}(x^3+3x^2y^2+3xy^4) + \frac{1}{5}x^5 + o(p^5) \end{aligned}$$

Non resta che moltiplicare tutto per x^2y (tutti i termini
seguono).

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 20

[in differita per coronavirus]

Note Title

22/03/2020

Studio locale di funzioni di più variabili (Lezioni 17 e 19 di AM2-14)

Se $\nabla f(x_0) = 0$, allora

$Hf(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ p.to min. locale

x_0 p.to di min. locale $\Rightarrow Hf(x_0) \geq 0$

$Hf(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ p.to max. locale

x_0 p.to max. locale $\Rightarrow Hf(x_0) \leq 0$

$Hf(x_0)$ N.D.P. $\Rightarrow x_0$ p.to di sella

$\uparrow$ matrice Hessiana (simmetrica)

Il punto che studiamo in questa lezione è sempre $(0,0)$

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y^2$ L'origine è p.to min. locale

1° modo : $f(0,0) = 0 \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
 $\uparrow$ stretta se $(x,y) \neq (0,0)$

2° modo $Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ le derivate seconde si ricavano da Taylor come visto alla les. prec.

$$f(x,y) = \frac{1}{2} (2x^2 + 4y^2)$$

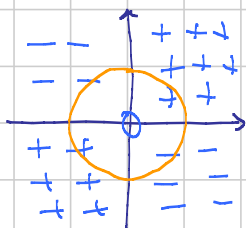
$$\uparrow$$

$$\frac{1}{2!} (f_{xx} x^2 + 2f_{xy} xy + f_{yy} y^2)$$

Non c'è nulla di 1° grado $\Rightarrow (0,0)$ è stazionario
 $f_x x + f_y y$

Esempio 2 $f(x, y) = xy$ $(0, 0)$ è p.to di sella!

1° modo



In $(0, 0)$ vale 0. In ogni intorno di $(0, 0)$ ci sono p.ti in cui $f > 0$ e p.ti in cui $f < 0$. Quindi $(0, 0)$ non può essere p.to di max/min.

2° modo

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

segno

$Tr = 0$ $Det = -1$ ← autovalori

Esempio 3 $f(x, y) = x^4 + y^4 \Rightarrow (0, 0)$ p.to di min. loc. (schetto)

1° modo: $f(0, 0) = 0 \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
 $\uparrow$ schetto $\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

2° modo

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

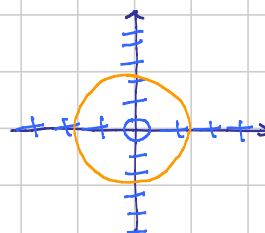
in Taylor non c'è nulla di grado 2

Dall' Hf NON si può dedurre nulla

Esempio 4 $f(x, y) = x^2 - y^4 \Rightarrow (0, 0)$ p.to di sella

1° modo: studio del segno

In ogni pallina ho sia + sia -



2° modo:

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalori: + 0

$\Rightarrow$ semidefinita positiva

$\Rightarrow$ posso escludere che $(0, 0)$

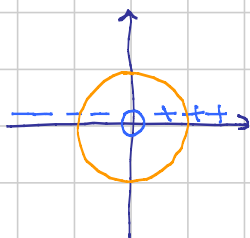
sia p.to di max, ma restano

aperte 2 possibilità 😞

Esempio 5 $f(x,y) = x^3 - y^3$

$(0,0)$ è p.ti di sella

1° modo:



In questo caso basta guardare l'asse x .

2° modo $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ambiguità totale !! 😞

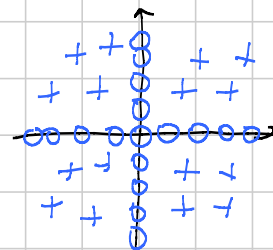
Esempio 6 $x^2 y^2$

$(0,0)$ p.to min. locale, ma non stretto!

$Hf = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 😞

$f(0,0) = 0 \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

↑
vale uguale se e solo se siamo sugli assi



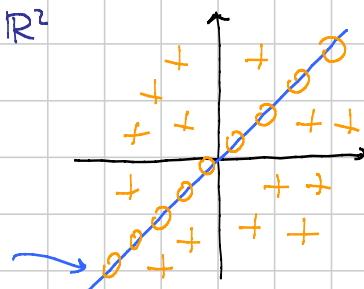
Oss. In questo caso tutti i p.ti sugli assi sono p.ti di min. locale (e anche globale)

Esempio 7 $f(x,y) = (x-y)^2 \Rightarrow (0,0)$ p.to di min. non stretto

1° modo $f(0,0) = 0 \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

↑
vale = se e solo se $y = x$

tutti p.ti di min.



2° modo $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$

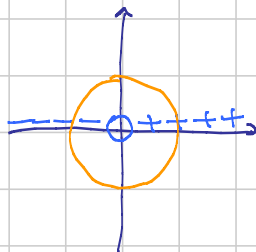
$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Tr} = 4$
 $\text{Det} = 0$

Autovalori: $+0$

$\Rightarrow$ semidefinita positiva $\Rightarrow$ 😞

Esempio 8 $f(x,y) = (x-y)^3 \Rightarrow (0,0)$ è p.to di "sella"

$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{☹}$$



Disegnare il grafico con il computer e vedere di cosa si tratta

Esempio 9 $f(x,y) = e^{xy} \Rightarrow (0,0)$ è p.to di sella

Taylor: $f(x,y) = 1 + xy + o(x^2+y^2)$

• Niente di primo grado $\Rightarrow (0,0)$ è stazionario

• xy sul 2° grado

$$\Rightarrow Hf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{autovalori } + - \\ \Rightarrow \text{sella}$$

Oss. Se il p.to è stazionario e Hf non ha autovalori nulli, allora il comportamento locale è lo stesso dei termini di 2° grado del pol. di Taylor.

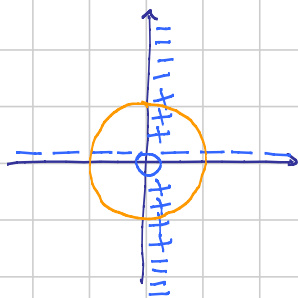
Esempio 10 $f(x,y) = x^4 + y^6 + \boxed{xy} \Rightarrow (0,0)$ è p.to di sella
questo conta!

Taylor: $f(x,y) = xy + o(x^2+y^2) \Rightarrow$ come prima

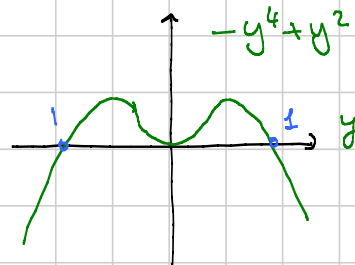
Esempio 11 $f(x,y) = -x^4 - y^4 + y^2 \Rightarrow (0,0)$ p.to di sella
(fare disegno!)

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Autovalori } + 0 \Rightarrow \text{☹}$$

Studio del segno



Ho usato che
 $-y^4 + y^2 > 0$ per y
 vicino a 0 (studio
 locale di analisi 1)



Esempio 12 $f(x,y) = x \sin y \Rightarrow (0,0)$ è p.to di sella!

Ancora! $f(x,y) = x(y + o(y)) = xy + o(x^2 + y^2)$

Esempio 13 $f(x,y) = \sin x - \sin y \Rightarrow$ NO STAZIONARIO

Taylor: $f(x,y) = x - y + o(\sqrt{x^2 + y^2})$
 $\uparrow$
 ordine 1

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= 1 \\ f_y(0,0) &= -1 \end{aligned}$$

C'è roba di 1° grado, quindi $(0,0)$ non è stazionario!!

Esempio 14 $f(x,y) = \cos x \cdot \cos y \Rightarrow (0,0)$ p.to di max
 stretto

1° modo: $f(0,0) = 1 \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
 $\uparrow$
 in $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ vale uguale
 se e solo se $(x,y) = 0$

Oss. Questa funzione ha tanti p.ti di max locale (e pure globale) e sono tutti i p.ti in cui entrambi i cos fanno 1, cioè i p.ti del tipo

$(2a\pi, 2b\pi)$ con a e b interi (esplorare il grafico)

Esempio 13 $f(x,y) = e^{xy} - xy$

$$f(x,y) = 1 + \cancel{xy} + o(x^2+y^2) - \cancel{xy}$$

- "uiente" di 1° grado $\Rightarrow (0,0)$ è stazionario
- "uiente" di 2° grado $\Rightarrow Hf = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{☹}$

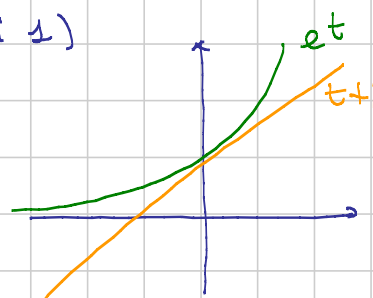
Bisogna sperare in disuguaglianze. Dico che

$$f(x,y) \geq 1 = f(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Se è vero, $(0,0)$ è p.to di min. La disug. diventa

$e^{xy} - xy \geq 1$, cioè $e^{xy} \geq xy + 1$, cioè $e^t \geq t + 1$, e questa è vera per ogni $t \in \mathbb{R}$ (Analisi 1)

e^t è convessa, dunque sta sopra le sue rette tangenti.



— o — o —

Piccola aggiunta allo schema iniziale

- Se $Hf(x_0)$ ha almeno un autovalore $+$, allora $Hf(x_0)$ NON può essere ≤ 0 , quindi x_0 NON può essere p.to di max (se lo fosse, allora $Hf(x_0) \leq 0$) ↑ può essere solo sella o min
- Se $Hf(x_0)$ ha almeno un autovalore $-$, allora ... x_0 NON può essere p.to di min. (ripetere ragionamento) ↑ può essere solo sella o max

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 21

[In differita per coronavirus]

Note Title

22/03/2020

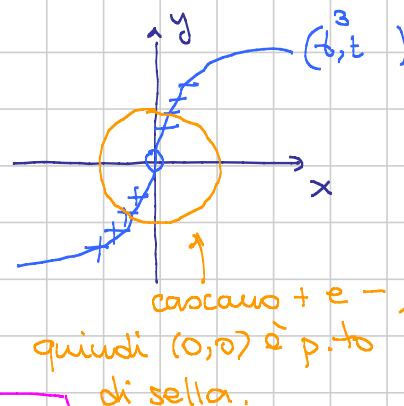
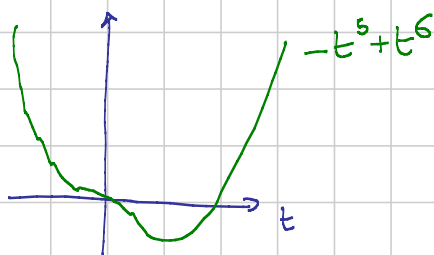
Punti stazionari e loro classificazioneEsempio 1 $x^2 - xy^2 + y^6$ Studiare $(0,0)$

$$f(x,y) = x^2 + o(x^2+y^2) \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ autovalori $\neq 0 \Rightarrow$ di sicuro non è p.to max, ma resta aperto min/sella

NON PENSARE NEMMENO: il termine di 2° grado è sempre ≥ 0 , il resto è 0 piccolo, quindi $(0,0)$ è p.to di min. locale.

Tentiamo un paragone: $f(t^3, t) = t^6 - t^5 + t^6 = -t^5 + 2t^6$



STRATEGIA per dim. che un p.to è di sella: trovare un omino che passa per quel p.to e vede valori di f maggiori e minori di quelli nel p.to stesso.

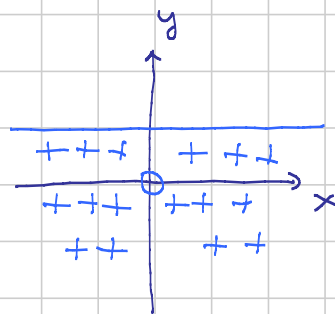
Esempio 2 $x^2 - x^2y + y^6$ Studiare $(0,0)$

Come prima $f(x,y) = x^2 + o(x^2+y^2)$, quindi restano le stesse poss. di prima (min./sella)

L'unico di prima vede $f(t^3, t) = 2t^5 - t^7$, quindi vede un minimo, ma NON BASTA per concludere.

Raccolgo: $f(x, y) = x^2(1-y) + y^5 \geq 0$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 ≥ 0 ≥ 0 vicino all'origine ≥ 0



Nota bene: vicino all'origine, cioè per $y < 1$,
vale il segno di $=$ se e solo se $(x, y) = (0, 0)$

Esempio 3 $x^4 + \sin(y^4) + \arctan(x^2 y^3)$ studiare $(0, 0)$

Taylor: $f(x, y) = x^4 + y^4 + o((x^2 + y^2)^2)$

basta per mangiare o piccolo (uno solo dei 2 non sarebbe bastato)

$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{😞}$

Se passiamo in polari viene

$$\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + \rho^4 w(\rho)$$

$\geq m > 0$ (solita storia)

$$\geq \rho^4 (m + w(\rho)) \geq \frac{m}{2} \rho^4 \text{ in una pallina}$$

$\downarrow$ tende a 0 quando $\rho \rightarrow 0$,
 quindi diventa $\geq -\frac{m}{2}$ in
 una opportuna palla centrata in $(0, 0)$

Oss. Avevi dovuto scrivere $w(x, y) = w(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, ma rimaneva comunque vero che è $\geq -\frac{m}{2}$ in una opportuna palla.

N.B. Non funziona nulla se ho x^4 solo invece di $x^4 + y^4$

Esempio 4 $f(x,y) = x \sin y - y \sin x$ Studiare $(0,0)$

Taylor: $f(x,y) = x(y - \frac{1}{6}y^3) - y(x - \frac{1}{6}x^3) + o((x^2+y^2)^{5/2})$

$$= \cancel{x y} - \frac{1}{6} x y^3 - \cancel{y x} + \frac{1}{6} y x^3 + o(p^5)$$

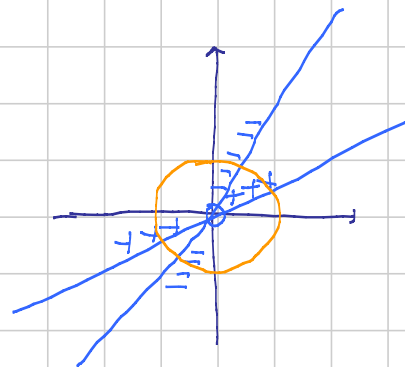
$$= \frac{1}{6} x y (x^2 - y^2) + o(p^5)$$

segno variabile

$$f(2t,t) = \frac{1}{6} \cdot 2t^2 (4t^2 - t^2) = t^4 + o(t^5)$$

$$f(t,2t) = \frac{1}{6} \cdot 2t^2 (t^2 - 4t^2) = -t^4 + o(t^5)$$

$\Rightarrow (0,0)$ è un p.to di sella (disegnare al computer)



NOTA: ad essere precisi, molto meno rischioso sostituire nella funzione iniziale

$f(t, 2t) = t \sin(2t) - 2t \sin t$ e poi sviluppare

$f(2t, t) = \dots$

Esempio 5 $f(x,y) = x e^{-(x^2+y^2)}$ Trovare i p.ti stat. e class.

$$\begin{cases} f_x = 0 & \begin{cases} e^{-(x^2+y^2)} + x e^{-(x^2+y^2)} (-2x) = 0 \\ x e^{-(x^2+y^2)} (-2y) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

2^a eqn $\rightarrow x=0 \rightarrow 1^a$ eqn. incompatibile $\hat{=}$
 $\searrow$ $y=0 \rightarrow 1^a$ eq.

$$e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = 0 \quad 2x^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi ci son 2 p.ti stazionari: $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

Che tipo di p.ti stazionari sono?

1° modo Calcolo $Hf(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e spero di non avere autov. nulli [calcolo per esercizio]

2° modo Mi faccio furbo :). Osservo che

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = 0 \quad (\text{c'è } e^{-e^2} \text{ che uccide il resto})$$

Osservo che $f(x,y)$ assume sia valori > 0 , sia valori < 0 .

Quindi per W. generalizzato f ammette max e min, che saranno assunti in p.ti staz.

Quindi $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ sono i p.ti di max/min (pure globale)

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \rightsquigarrow \text{p.to di max}$$

$$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \rightsquigarrow \text{p.to di min}$$

Esempio 6 $f(x,y) = e^{xy} + x^2$

$$f_x(x,y) = y e^{xy} + 2x = 0$$

$$f_y(x,y) = x e^{xy} = 0 \quad \rightsquigarrow x=0 \rightsquigarrow y=0$$

L'unico p.to staz. è $(0,0)$. Per classificarlo posso calcolare $Hf(0,0)$

$$f(x,y) = 1 + xy + x^2 + o(x^2+xy+y^2) \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} < 0 \Rightarrow$ autov. $+$ $- \Rightarrow$ p.to di sella.

Ulteriore esercizio : calcolare sup/inf/max/min

$$\text{sup} = +\infty \quad f(t,0) = 1+t^2 \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow \pm\infty$$

$\inf = 0$ e NON è min. Servono solite 3 verifiche

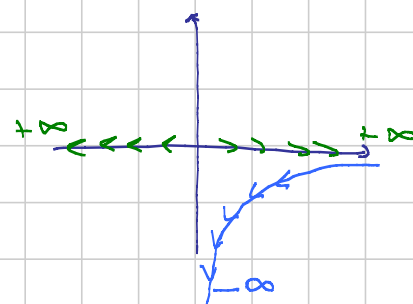
- $f(x,y) \geq 0$ sempre (quasi ovvio)
- $f(x,y) = 0$ mai (quasi ovvio per via dell'esponenziale)
- posso avvicinarmi a 0 quanto voglio.

Brutal mode: deve essere $x \sim 0$ e $xy \sim -\infty$

$$f\left(\frac{1}{t}, -t^2\right) = e^{-t} + \frac{1}{t^2} \quad \text{e mandando } t \rightarrow +\infty$$

$$y = -\frac{1}{x^2}$$

[Esercizio: indagare con il computer]



Esempio 7 $f(x,y) = e^{xy} - x^2 - y^2$

Cerco i p.ti stazionari

$$\begin{aligned} f_x &= y e^{xy} - 2x = 0 & \cdot x \\ f_y &= x e^{xy} - 2y = 0 & \cdot y \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} xy e^{xy} &= 2x^2 \\ xy e^{xy} &= 2y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x$$

• Se $y = x$, allora $x e^{x^2} - 2x = 0 \Rightarrow x(e^{x^2} - 2) = 0$

Quindi $x = y = 0$, oppure $x = y = \pm \sqrt{\log 2}$

• Se $y = -x$, allora $-x(e^{x^2} + 2) = 0 \Rightarrow x = -y = 0$

Quindi $f(x,y)$ ha 3 p.ti stat.: $(0,0)$, $(\sqrt{\log 2}, \sqrt{\log 2})$, $(-\sqrt{\log 2}, -\sqrt{\log 2})$

Andiamo a classificare i p.ti

• $(0,0)$: Taylor dice $f(x,y) = 1 + \boxed{xy - x^2 - y^2} + o(x^2 + y^2)$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Det} > 0 \quad \text{Tr} < 0 \Rightarrow \text{autov. } --$$

$\Rightarrow (0,0)$ è p.to di max locale

• Gli altri 2 : $f_{xx} = y^2 e^{xy} - 2$ $f_{xy} = e^{xy} + xy e^{xy}$
 $f_{yx} = \dots$ $f_{yy} = x^2 e^{xy} - 2$

$$Hf(\pm \sqrt{\log 2}, \pm \sqrt{\log 2}) = \begin{pmatrix} \log 2 \cdot 2 - 2 & 2 + 2 \log 2 \\ 2 + 2 \log 2 & \log 2 \cdot 2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 4(\log 2 - 1)^2 - 4(\log 2 + 1)^2 < 0 \Rightarrow \text{autovalori } +-$$

$\Rightarrow$ entrambi p.ti di sella.

Inf / sup / max / min

• $\text{sup} = +\infty$ $(f(t,t) = e^{t^2} - 2t^2 \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow \pm\infty)$

• $\text{inf} = -\infty$ $(f(t,0) = 1 - t^2 \rightarrow -\infty \text{ per } t \rightarrow \pm\infty)$

[Grafico ad computer per vedere che accade]

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 22

[In differita per coronavirus]

Note Title

24/03/2020

Prerequisiti: tutto fino alla lezione 21 di AM2-14
+ coordinate sferiche nello spazio (lezione 23).

Esempio 1 $f(x,y) = (x^6 y^6 + y^{15})$ Studio locale vicino a $(0,0)$

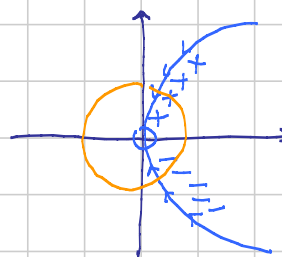
Taylor: $f(x,y) = \underbrace{x^6 y^6}_{\geq 0} + o(r^{12})$
PERÒ NON BASTA!!

(Basterebbe se ci fosse $x^{12} + y^{12}$ o $x^6 + y^6$)

Il termine successivo è importante ai fini del segno

$$f(t^3, t) = t^{18} + t^{15} = t^5 + o(t^{18})$$

↑
questo comanda
e decide il segno

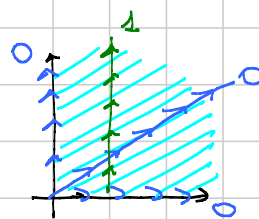


$\Rightarrow (0,0)$ è un p.to di sella.

Inf/sup su $\mathbb{R}^2$: $\sup = +\infty$ $\inf = -\infty$ $f(0,t) = t^{15}$ $t \rightarrow +\infty$
 $t \rightarrow -\infty$

Esempio 2 $f(x,y) = \frac{xy^2}{1+x^2y^2}$

• lim all'infinito con dominio $x \geq 0, y \geq 0$



[In polari sembra del tipo $\frac{p^3}{p^4}$, MA IL p^4 al denominatore è abusivo 😞]

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0)$$

per $m=0$ è speciale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{m^2 t^3}{1 + m^2 t^4} = 0 \text{ per ogni } m \geq 0$$

↑

Su tutte le rette uscenti dall'origine il limite è 0.

Proviamo sulle parabole $y = ax^2$

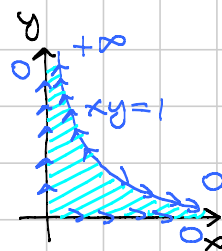
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, at^2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2 t^5}{1 + a^2 t^6} = 0 \quad \text{Uhm...}$$

In realtà il limite non è 0!!!

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(1, t) = \frac{t^2}{1 + t^2} = 1 \quad \text{GULP!}$$

- lim all'infinito con dominio $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1$

Se il limite esiste, allora è 0.



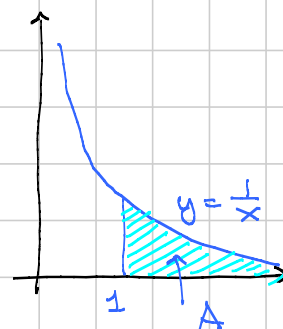
$$f(t, \frac{1}{t}) = \frac{\frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t}} = \frac{1}{2t} \quad \begin{array}{l} \text{per } t \rightarrow +\infty \text{ tende a } 0 \\ \text{per } t \rightarrow 0^+ \text{ tende a } +\infty \end{array}$$

[Esplorare con il computer lungo asse y]

- limite all'infinito con dominio $x \geq 1, y \geq 0, xy \leq 1$

Qui il limite potrebbe essere 0.

$$0 \leq \frac{xy^2}{1 + x^2 y^2} \leq \frac{x \cdot \frac{1}{x^2}}{1} = \frac{1}{x}$$



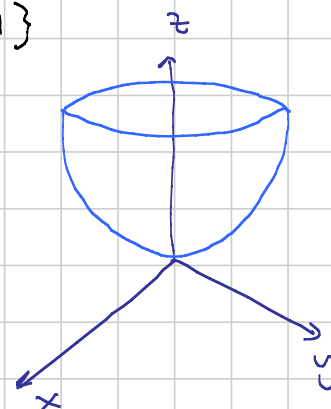
Mi basta dimostrare che x tende a $+\infty$ quando $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$
E siamo nella zona indicata, cosa abbastanza intuitiva

$$\begin{array}{l} \textcircled{x} = \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - y^2} \geq \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \\ \downarrow \text{ } \infty \text{ in } A \quad \quad \quad \uparrow \text{ vera in } A \text{ perché } 0 \leq y \leq 1 \quad \quad \quad \downarrow \text{ } +\infty \text{ su tutto } \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Esempio 3 Max/min di $f(x,y,z) = y+z-x^2$
sull'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$

- L'insieme è compatto, quindi per W max e min esistono

- ∇f esiste sempre e non si annulla mai
 $\Rightarrow$ niente stat. interni e niente sing. int.



- Bordo, pezzo con $z=1$ (base superiore). Diventa
 $y+1-x^2$

da studiare sul cerchio $x^2+y^2 \leq 1$. Si può fare ad esempio con i moltiplicatori

1° sistema $\leadsto$ nulla

2° sistema

$$\begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\leadsto x(\lambda+1) = 0$$

$$\begin{aligned} &\swarrow \\ x=0 \\ &\downarrow \\ y=\pm 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\searrow \\ \lambda = -1 \\ &\downarrow \\ y = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

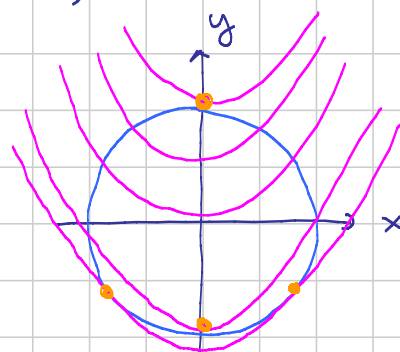
$$\downarrow \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Abbiamo quindi 4 candidati:

$$(0,1) \quad (0,-1) \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Sensato? Verifico con linee di livello

$$y+1-x^2 = \lambda \quad y = x^2 - 1 + \lambda$$



- Bordo, pezzo paraboloide.
Abbiamo due opzioni

$\rightarrow$ andare di moltiplicatori con $\phi(x,y) = z - x^2 - y^2$
 $f(x,y) = y + z - x^2$

1° sistema $\leadsto \emptyset$ 2° sistema $\leadsto$

$$\begin{cases} -2x = -2\lambda x \\ 1 = -2\lambda y \\ 1 = \lambda \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

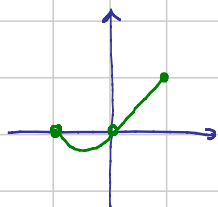
$\leadsto$ risolvo e mi limito
a considerare i pti
con $z \leq 1$

$\rightarrow$ andare di sostituzione del vincolo, cioè studio

$$y + \frac{x^2 + y^2}{z} - x^2 = y + y^2 \leadsto \text{è evidente che il minimo è per } y = -\frac{1}{2}$$

e lo studio solo per $x^2 + y^2 \leq 1$

il max è per $y = 1$



(verificare che i
moltiplicatori venisse
lo stesso!!)

Esempio 4 $x^2 + y^2 + z^4 + xyz$ Inf / sup / max / min in $\mathbb{R}^3$

Provo un minimo esploratore che pareggi gli esponenti

$$f(t^3, t^3, t) = 3t^4 + t^5$$

per $t \rightarrow +\infty$ tende a $+\infty$ $\leadsto$ sup
per $t \rightarrow -\infty$ tende a $-\infty$ $\leadsto$ inf.

Esempio 5 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 z^2 + y^2 \leq 1\}$

Domanda: A è compatto? Intanto è chiuso perché c'è il $\leq$.

Provo a vedere se le coord. sono limitate: di sicuro $-1 \leq y \leq 1$
e $x^4 z^2 \leq 1$, ma questo non basta.

E infatti l'insieme NON è limitato. Ad esempio il pto
(t, 0, 0) è insieme per ogni t reale

$\uparrow$
asse x



ANALISI 2

LEZIONE 23

[In differita per coronavirus]

Note Title

24/03/2020

Esempio 1 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + z^2 + xy}_{f(x, y, z)} \leq 1\}$ è limitato?

1° modo Completo, quadrati:

$$x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2 + z^2 \leq 1$$

$$(x + \frac{1}{2}y)^2 + z^2 - \frac{1}{4}y^2 \leq 1$$

Scelgo $y = 2t, z = t, x = -t$ e osservo che sta nell'insieme per ogni valore di t , mentre la sua norma tende a $+\infty$ per $t \rightarrow +\infty$.

In bella copia scrivo: considero $(-t, 2t, t)$. Sostituendo nella relazione data viene $t^2 + t^2 - 2t^2 = 0 \leq 1$.

2° modo Osservo che $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 3t^2 = +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, -3t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t^2 = -\infty$$

FATTO GENERALE (Enunciato e dim. in $\mathbb{R}^2$, ma vale uguale in $\mathbb{R}^3$)

Supponiamo che esista una successione (x_n, y_n) t.c.

$$x_n^2 + y_n^2 \rightarrow +\infty \text{ e } f(x_n, y_n) > 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Supponiamo che esista un'altra $(\hat{x}_n, \hat{y}_n)$ t.c.

$$\hat{x}_n^2 + \hat{y}_n^2 \rightarrow +\infty \text{ e } f(\hat{x}_n, \hat{y}_n) < 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Allora l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{f(x, y)}_{\text{continua}} = 0\} \text{ NON è limitato}$$

Dim. Fissiamo $R > 0$

Fuori dal cerchio trovo un p.to in cui $f > 0$ e un p.to in cui $f < 0$.

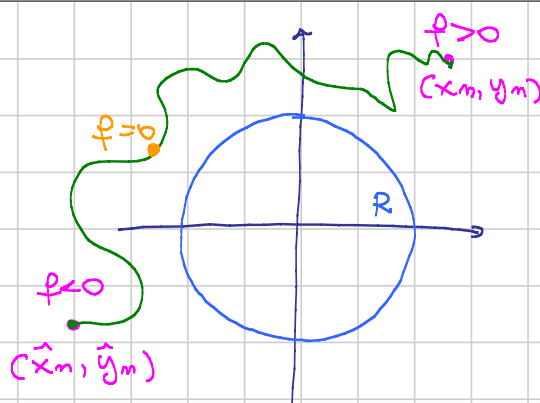
Considero una curva $(x(t), y(t))$ che unisce i 2 p.ti

RIMANENDO FUORI DAL

CERCHIO. La prendiamo con $x(t)$ e $y(t)$ continue.

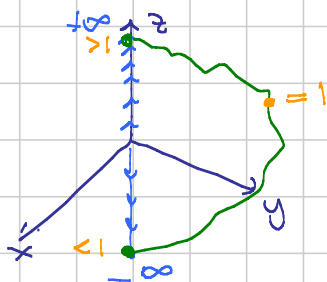
La funzione $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ passa da valori negativi a valori positivi, quindi per analisi 1 si annulla in ALMENO un p.to on the road.

Abbiamo ottenuto un p.to in cui f si annulla fuori dalla palla.



Esempio 2 $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^3 + x + y = 1 \}$
è limitato? NO!

1° modo Con i limiti $f(0,0,t) = t^3 \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$
 $\rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow -\infty$



L'insieme A è il grafico della funzione

2° modo Ricavo z : $z = \sqrt[3]{1-x-y-x^3-y^3}$

Posso dare a x e y i valori che voglio, anche enormi

Esempio 3 $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y + z = 1, y^2 + z^2 \leq 7 \}$

È limitato!

$$x = \sqrt[3]{1-y-z}$$

questo è limitato

da queste deduciamo che y e z sono limitati

Esempio 4 Limite all'infinito di $x^5 + y^4 + z^4 - xyz$

$$f(t, 0, 0) = t^5 \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty \\ \rightarrow -\infty \text{ per } t \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \text{ il limite non esiste}$$

E se ci limitiamo a $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$? Potrebbe esistere e fare $+\infty$

Osserviamo che $x^5 \geq x^4 - 1$ è vera per ogni $x \geq 0$
(dividere i casi $x \in [0, 1]$ e $x \geq 1$)

Di conseguenza

$$f(x, y, z) \geq x^4 + y^4 + z^4 - xyz$$

Passiamo in coord. sferiche (versione da geografi)

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 - xyz &= \rho^4 (\overbrace{\cos^4 \theta \cos^4 \varphi + \sin^4 \theta \cos^4 \varphi + \sin^4 \theta}^{\geq m > 0}) \\ &\quad - \underbrace{\rho^3 \cdot \text{altra roba trigo}}_{\leq 1} \\ &\geq \rho^4 m - \rho^3 = \rho^3 (m\rho - 1) \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Il p.to fondamentale è il solito discorso: la funz. di 2 variabili

$$(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi$$

ammette un minimo in $[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Questo è ≥ 0 ,
e non può essere nullo perché dovrebbero essere nulli
 $\sin \varphi$ e $\cos \varphi$ contemporaneamente.

Oss. Esiste il minimo della $f(x, y, z)$ per $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
e volendo si trova.

Esempio 4 Limite all'infinito di $\frac{x^2 y}{x^6 + y^2 + z^6}$

Poneggiamo gli esponenti ponendo $x = u$, $y = v^3$, $z = w$ e otteniamo

$$\frac{u^2 v^3}{u^6 + v^6 + w^6}$$

Quando passiamo in sferiche diventa e quindi il limite è 0.

$\frac{\rho^5}{\rho^6}$ ho il solito $u > 0$ per i soliti motivi

Se avessi avuto $\frac{x^3 y}{x^6 + y^2 + z^6}$ il limite non esisteva

Poneggiando veniva $\frac{u^3 v^3}{u^6 + v^6 + w^6}$ e ora basta usare
" $g(u, v, w)$

$$g(t, 0, 0) \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

$$g(t, t, t) \rightarrow \frac{1}{3} \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

Potero usare dirett. la funz. iniziale: $f(t, 0, 0)$, $f(t, t^3, t)$

Esempio 5 Limite all'infinito di $x^2 + yz + z^2$

Direi che non esiste

$$f(t, 0, 0) = t^2 \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

$$f(t, -3t, t) = -t^2 \rightarrow -\infty \text{ per } t \rightarrow \pm\infty.$$

• Stessa cosa con $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(t, 0, 0) = t^2 \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow +\infty \\ f(0, t, 0) = 0 \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \text{ nemmeno qui esiste}$$

• Stessa cosa $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1$.

Osserviamo che $yz = \frac{1}{x}$ nell'unione, quindi è come fare

il limite di $x^2 + z^2 + \frac{1}{x}$. Ora possiamo tenere questo limitato e mandare $y \rightarrow +\infty$

$$f(1, t, \frac{1}{t}) = 1 + 1 + \frac{1}{t} \rightarrow 2 \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

e quindi anche in questo caso il limite non esiste.

Esempio 6 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1, x+y = 1\}$
È limitato?

No! Basta forse ricavare: $y = 1-x$, $z = \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-x^2}$

Basta quindi osservare che

$(t, 1-t, \frac{1}{t-t^2}) \in A$ quando t è abbastanza grande
e la norma di questo vettore
tende all'infinito per $t \rightarrow +\infty$

— o — o —

FINE PARTE DI CALCOLO

DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI.

ANALISI 2

LEZIONE 24

[Conetto dopo video]
[In differita per coronavirus]

Note Title

26/03/2020

Integrali doppi su rettangoli [Vedi Oss. 22 e 23 di AM2-14]

Se $A = [a, b] \times [c, d]$, allora

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y)$$

Esempio 1 $A = [0, 1] \times [0, 1]$ $\iint_A (x+y) dx dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$\iint_A x dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 dy x = \int_0^1 dx [xy]_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 dx x = \frac{1}{2}$$

primitiva di x rispetto a y

$$\iint_A y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 dy y = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$$

primitiva di y rispetto a y

Oss 1 Nel calcolare il 1° integrale potevo osservare che x è una costante quando integro in dy , quindi

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \quad \textcircled{x} = \int_0^1 x dx \underbrace{\int_0^1 1 \cdot dy}_{\text{lunghezza interv.}} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Oss 2 Gli integrali di x e y sono venuti uguali. C'è un motivo. Infatti geometricamente rappresentano volumi uguali (pensare ai 2 grafici).

Formalmente, se consideriamo la trasformazione

$$(x, y) \rightarrow (y, x) \quad \text{(simmetria rispetto alla bisettrice } y=x)$$

accadono due cose

- trasforma le 2 integrande l'una nell'altra
- manda A insieme a se stesso.

Esempio 2 $A = [0, 1] \times [0, 3]$ $\iint_A xy^2 dx dy$

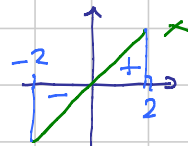
1° modo $\int_0^1 dx \int_0^3 dy \otimes y^2 = \int_0^1 x dx \int_0^3 y^2 dy = \int_0^1 x dx \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=3}$
 $= \int_0^1 x \cdot 9 dx = \left[\frac{9}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{9}{2}}$

2° modo $\int_0^3 dy \int_0^1 dx \otimes y^2 = \int_0^3 y^2 dy \int_0^1 x dx = \int_0^3 y^2 dy \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1}$
 $= \int_0^3 y^2 \cdot \frac{1}{2} dy = \left[\frac{1}{6} y^3 \right]_{y=0}^{y=3} = \boxed{\frac{9}{2}}$ 😊

Oss. È sempre una buona verifica calcolare un integrale in due modi diversi.

Esempio 3 $A = [-2, 2] \times [0, 1]$ $\iint_A xy^2 dx dy$

1° modo $\int_{-2}^2 dx \int_0^1 dy \otimes y^2 = \int_{-2}^2 x dx \int_0^1 y^2 dy = \int_{-2}^2 x dx \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=1}$
 $= \frac{1}{3} \int_{-2}^2 x dx = 0$

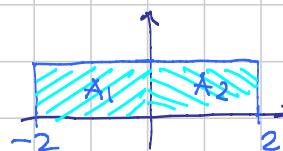


2° modo Era prevedibile che veniva 0 per

QUESTIONE DI SIMMETRIA. Si tratta di osservare che

- La funzione $f(x, y) = xy^2$ è DISPARI nella variabile x cioè $f(-x, y) = -f(x, y)$ (cambia segno se $x \rightsquigarrow -x$)
- L'insieme A di integrazione è simmetrico risp. all'asse y , cioè non cambia rispetto alla trasformazione $(x, y) \rightarrow (-x, y)$

Bruttalmente: tanto $f(x, y)$ è positiva in A_2 quanto $f(x, y)$ è negativa in A_1 .
 Quindi i due contributi si compensano.



Per convincersene formalmente basta usare la formula che integra all'interno risp. alla variabile x .

Esempio 4 $A = [0,1] \times [1,2]$ $f(x,y) = \log y$

1° modo $\int_0^1 dx \int_1^2 dy \log y = \int_0^1 dx \left[y \log y - y \right]_{y=1}^{y=2}$
verificare derivando che sia davvero una primitiva

$$= \int_0^1 dx (2 \log 2 - 2 + 1)$$

$$= (2 \log 2 - 1) \int_0^1 dx = 2 \log 2 - 1$$

2° modo $\int_1^2 dy \int_0^1 dx \log y = \int_1^2 \log y dy \int_0^1 dx = \int_1^2 \log y dy$
lung. interv. = 1
 = finale come sopra.

Esempio 5 $A = [-1,0] \times [0,3]$ $f(x,y) = e^{x+2y}$

1° modo $\int_{-1}^0 dx \int_0^3 dy e^{x+2y} = \int_{-1}^0 e^x dx \int_0^3 e^{2y} dy$
 $e^x \cdot e^{2y}$

$$= \int_{-1}^0 e^x dx \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_{y=0}^{y=3} = \frac{1}{2} (e^6 - 1) \int_{-1}^0 e^x dx = \frac{1}{2} (e^6 - 1) [e^x]_{-1}^0 = \frac{1}{2} (e^6 - 1) \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

2° modo $\int_0^3 dy \int_{-1}^0 dx e^{x+2y} = \int_0^3 e^{2y} dy \int_{-1}^0 e^x dx$
 = finale come sopra

Esempio 6 $A = [0,1] \times [1,2]$ $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$

Osserviamo che l'integrale è PROPRIO perché $y \in [1,2]$

$$\begin{aligned} \int_1^2 dy \int_0^1 dx \frac{x}{y^2} &= \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy \underbrace{\int_0^1 x dx}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=1}^{y=2} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Oss. importante Nell'esempio precedente sapevo a priori che l'integrale era un numero POSITIVO dal momento che $f(x,y) \geq 0$ e non identicamente nulla in A ($x \in [0,1]$).

NON PROVARE NEKKENO A SCRIVERE RISULTATI NEGATIVI !!!

Esempio 7 $A = [0,2] \times [0,\pi]$ $f(x,y) = \frac{\sin(3y)}{4+x^2}$

$$\int_0^2 dx \int_0^\pi dy \frac{\sin(3y)}{4+x^2} = \int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx \int_0^\pi \sin(3y) dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx \left[-\frac{1}{3} \cos(3y) \right]_{y=0}^{y=\pi} = \int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx \left[-\frac{1}{3} \cos(3\pi) + \frac{1}{3} \cos 0 \right]$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{2}{3} \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{2}{3} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{3} \left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{3} \arctan(1) = \frac{\pi}{12}.$$

Oss. Forse è ora di ripassare le primitive (vedi les. AM1)

Esempio 8 $A = [0,2] \times [0,1]$ $f(x,y) = x^2 + \arctan y$

$$\int_0^2 dx \int_0^1 dy x^2 = \int_0^2 x^2 dx \underbrace{\int_0^1 1 dy}_{=1} = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{3}$$

$$\iint_A \arctan y dy = \int_0^1 dy \arctan y \int_0^2 1 dx = 2 \int_0^1 \arctan y dy$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} 2 \left[y \arctan y \right]_{y=0}^{y=1} - 2 \int_0^1 \frac{y}{1+y^2} dy$$

$$\stackrel{\uparrow}{\text{per parti}} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \left[\log(1+y^2) \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{\pi}{2} - \log 2$$

Da ricordare: $\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$

si fa con la tecnica "dell'1 nascosto".

Esempio 9 $A = [0, 1] \times [-2, 2]$ $f(x, y) = \arctan(xy^3)$

$$\int_A \arctan(xy^3) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-2}^2 dy \arctan(xy^3)$$

di questa dovremmo fare la primitiva, che tecnicamente si può fare

MA in questo caso l'integrale fa 0 per simmetria, poiché

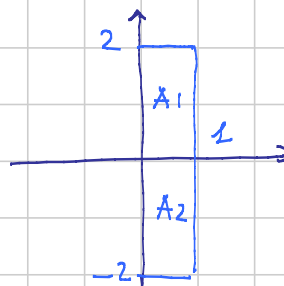
- $f(x, y)$ è DISPARI rispetto alla variabile y , cioè

$$f(x, -y) = -f(x, y)$$

($\arctan$ è dispari e z^3 è esponenziale dispari)

- L'insieme A è simm. rispetto all'asse x (cioè non varia quando cambio y con $-y$)

Tanto l'integrale è positivo in A_1 ,
quanto è negativo in A_2 .



— 0 — 0 —

ANALISI 2

- LEZIONE 25

[In differita per coronavirus]

Note Title

26/03/2020

Esempio 1 $A = [0,1] \times [0,1]$

$$f(x,y) = ye^{xy}$$

$$\boxed{\text{1° modo}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy ye^{xy}$$

Devo fare la primitiva di ye^{xy} rispetto alla variabile y . Per parti

$$\int ye^{xy} dy = \underbrace{y}_{F} \underbrace{\frac{e^{xy}}{x}}_G - \int \underbrace{\frac{e^{xy}}{x}}_G \underbrace{1}_{F'} dy = \frac{y}{x} e^{xy} - \frac{e^{xy}}{x^2}$$

[Verifica derivando: $\frac{1}{x} e^{xy} + \frac{y}{x} \times e^{xy} - \frac{1}{x} e^{xy}$ 😊]

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{y}{x} e^{xy} - \frac{e^{xy}}{x^2} \right]_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 dx \left\{ \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right\}$$

ora dovrei integrare questo, e posso provare per parti

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_G \cdot \underbrace{e^x}_{F'} dx = \log x \cdot e^x - \int \log x \cdot e^x dx = \text{brutto guaio!}$$

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_F \underbrace{e^x}_G dx = \underbrace{\frac{1}{x}}_F e^x + \int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{F'} \underbrace{e^x}_G dx$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx &= \frac{1}{x} e^x + \int \frac{e^x}{x^2} dx - \int \frac{e^x}{x^2} + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{x} e^x - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

[Verifica: $\left(\frac{1}{x} e^x - \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} e^x + \frac{1}{x} e^x + \frac{1}{x^2}$ ∴]

$$- \left[\frac{1}{x} e^x - \frac{1}{x} \right]_{x=0}^{x=1} = e - 1 \quad \text{sembra un problema per } x=0, \text{ MA}$$

$$= \left[\frac{e^x - 1}{x} \right]_{x=0}^{x=1} = e - 1 - 1 = e - 2$$

↑
almeno quando $x \rightarrow \infty$
il limite diventa 1

QUANTA DIFFICOLTÀ !!!

2° modo Impostiamolo nell'altro verso:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx \, y e^{xy} = \int_0^1 dy [e^{xy}]_{x=0}^{x=1} = \int_0^1 dy (e^y - 1)$$

↑
primitiva in x

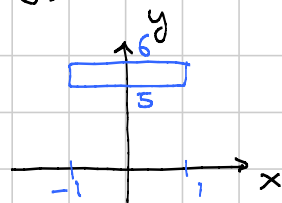
$$= [e^y - y]_{y=0}^{y=1} = e - 1 - 1 = e - 2$$

Morale della favola Un integrale può venire in 2 modi, ma con difficoltà molto diverse.

Esempio 2 $A = [-1, 1] \times [5, 6]$ $f(x, y) = xy \cos(x^2 y)$

L'integrale è banalmente nullo !!

- $f(-x, y) = -f(x, y)$ (Dispari in x)
- insieme simmetrico rispetto asse y (A non cambia se muto x con -x)



Esempio 3 $A = [0, 1] \times [0, \pi]$ $f(x, y) = xy \cos(x^2 y)$

1° modo $\int_0^1 dx \int_0^\pi dy \, xy \cos(x^2 y)$

2° modo $\int_0^\pi dy \int_0^1 dx \, xy \cos(x^2 y) = (*)$

Domanda: preferisco fare primitiva in x o y? In x !!!

$$(*) = \int_0^\pi dy \left[\frac{1}{2} \sin(x^2 y) \right]_{x=0}^{x=1} = \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin y \, dy$$

↑
verifica!

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$



Esempio 4 $A = [0, 1] \times [0, 1]$ $f(x, y) = x e^{x^2+y}$

1° modo $\int_0^1 dy \int_0^1 dx \underbrace{x e^{x^2+y}}_{e^{x^2} \cdot e^y} = \int_0^1 e^y dy \int_0^1 x e^{x^2} dx$

$$= \int_0^1 e^y dy \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} (e-1) \int_0^1 e^y dy = \frac{1}{2} (e-1)^2$$

2° modo $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \underbrace{x e^{x^2}}_{\text{facili conti}} \cdot e^y = \int_0^1 x e^{x^2} dx \int_0^1 e^y dy$

Esempio 5 $A = [0, 1] \times [-1, 1]$ $f(x, y) = \frac{x}{1+x^2y^2}$

1° modo $\int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy \frac{x}{1+x^2y^2} = \int_0^1 dx \left[\arctan(xy) \right]_{y=-1}^{y=1}$

$$= 2 \int_0^1 dx \arctan x$$

$$= 2 \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_{x=0}^{x=1} = 2 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 \right] = \frac{\pi}{2} - \log 2$$

↑ verifica!

2° modo $\int_{-1}^1 dy \int_0^1 dx \frac{x}{1+x^2y^2} = \int_{-1}^1 dy \left[\frac{1}{2y^2} \log(1+x^2y^2) \right]_{x=0}^{x=1}$

↑ verifica!

$$= \int_{-1}^1 dy \frac{\log(1+y^2)}{2y^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{y^2} \log(1+y^2) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{y} \log(1+y^2) + \int \frac{1}{y} \frac{2y}{1+y^2} dy \right]_{y=-1}^{y=1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{y} \log(1+y^2) + 2 \arctan y \right]_{y=-1}^{y=1} = -\log 2 + \frac{\pi}{4}$$

Osservazione Giustamente il risultato è lo stesso, ma con procedimenti del tutto diversi.

Esempio 6 $A = [0, 1] \times [1, 2]$ $f(x, y) = \frac{\log(x+y)}{(x+y)^3}$

1° modo $\int_0^1 dx \int_1^2 dy \frac{\log(x+y)}{(x+y)^3} = (*)$

In un angolo mi calcolo

$$\int \frac{1}{t^3} \log t = \underbrace{-\frac{1}{2} \frac{1}{t^2}}_G \underbrace{\log t}_F + \int \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{t^2}}_G \cdot \underbrace{\frac{1}{t}}_F dt = -\frac{1}{2} \frac{\log t}{t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^3} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\log t}{t^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{t^2} = -\frac{1}{4} \frac{2 \log t + 1}{t^2}$$

Verifica! $-\frac{1}{4} \left[\frac{2 \log t + 1}{t^2} \right]' = -\frac{1}{4} \left(\frac{\cancel{\frac{2}{t}} t^2 - 2t (2 \log t + 1)}{t^4} \right) = \frac{\log t}{t^3}$ 😊

$$(*) = \int_0^1 dx \left[-\frac{1}{4} \frac{2 \log(x+y) + 1}{(x+y)^2} \right]_{y=1}^{y=2}$$

Forse è + comodo farlo nell'altro verso, almeno se ne va un logaritmo

2° modo $\int_1^2 dy \left[-\frac{1}{4} \frac{2 \log(x+y) + 1}{(x+y)^2} \right]_{x=0}^{x=1}$

$$= -\frac{1}{4} \int_1^2 dy \left\{ \frac{2 \log(y+1) + 1}{(y+1)^2} - \frac{2 \log y + 1}{y^2} \right\}$$

= primitive che si fanno come prima

Esempio 7 $A = [0, 1] \times [0, 1]$ $f(x, y) = \frac{xy^3}{1+x^4y^4}$

1° modo $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{xy^3}{1+x^4y^4} = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{4x^3} \log(1+x^4y^4) \right]_{y=0}^{y=1}$

↑ verifica!

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{\log(1+x^4)}{x^3} dx = \text{per parti si fa}$$

$$\boxed{2^o \text{ modo}} \quad \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{xy^3}{1+x^4y^4} = \int_0^1 dy \left[\frac{1}{2} y \arctan(x^2y^2) \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \int_0^1 dy \frac{1}{2} y \arctan(y^2) \quad \text{e questo per parti si fa.}$$

Controllare che venga lo stesso nei 2 modi, che portano a calcoli completamente diversi.

— o — o —

ANALISI 2

— LEZIONE 26

[In differita per coronavirus]

Note Title

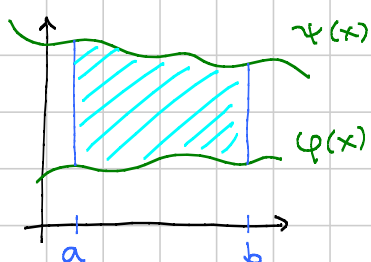
26/03/2020

Insieme normali nel piano

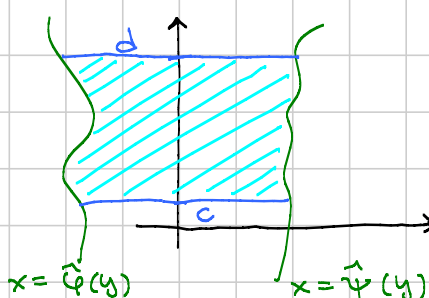
(Lezioni 23/24 di AM2-14)

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \quad \text{Normale asse } x$$

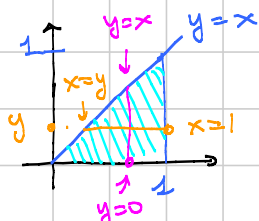
$$B = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \hat{\varphi}(y) \leq x \leq \hat{\psi}(y)\} \quad \text{Normale asse } y$$



Asse x



Asse y

Esempio 1

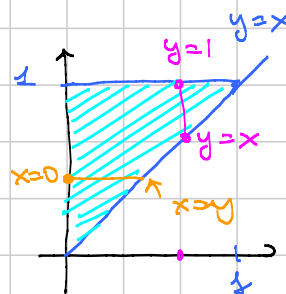
$$\text{Asse } x: A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

$$\text{Asse } y: A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$$

Esempio 2

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

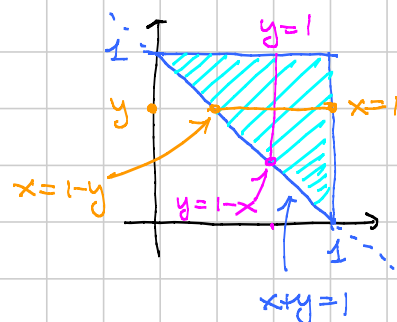
$$= \{ \quad \quad : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y \}$$



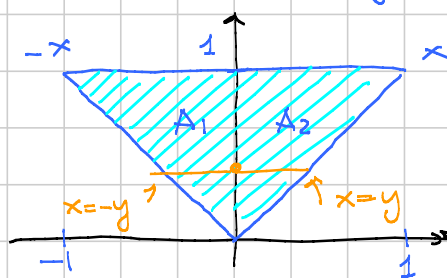
Esempio 3

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 1-x \leq y \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 1, 1-y \leq x \leq 1\}$$

Esempio 4

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq x \leq 1, |x| \leq y \leq 1\}$
 conetta, ma $|x|$ può essere fastidioso
 su un integrale



$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq x \leq 0, -x \leq y \leq 1\}$$

(A₁)

$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

(A₂)

Normale rispetto all'asse y si può fare in un solo pezzo senza usare valori assoluti

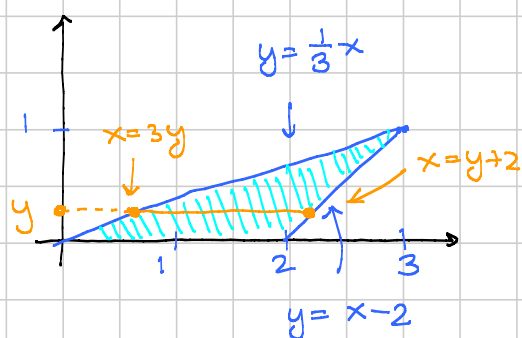
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq y\}$$

Esempio 5

Normale risp. asse x servono 2 pezzi

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{x}{3}\}$$

$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 2 \leq x \leq 3, x-2 \leq y \leq \frac{x}{3}\}$$



Normale risp. asse y basta un pezzo solo

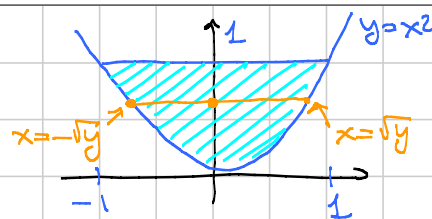
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 1, 3y \leq x \leq y+2\}$$

[Verificare per qualche valore di y]

Esempio 6

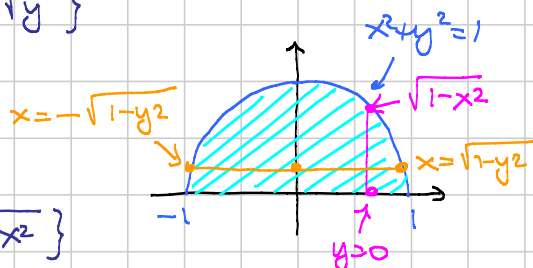
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

Esempio 7

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

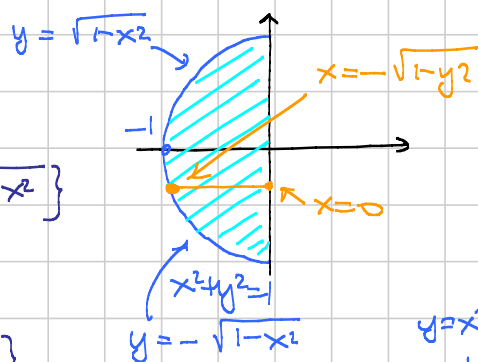
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$$

Esempio 8

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq x \leq 0, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

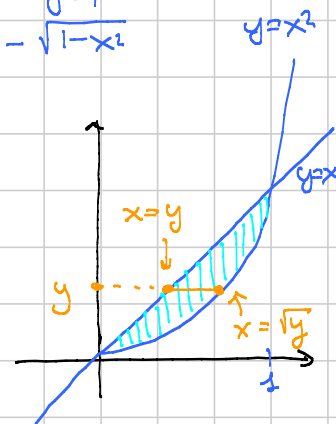
(asse x)

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 0\}$$

Esempio 9

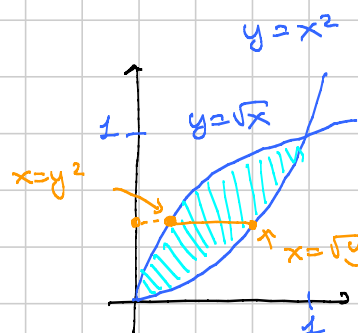
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, \underset{\text{parab}}{x^2} \leq y \leq \underset{\text{retta}}{x}\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

Esempio 10

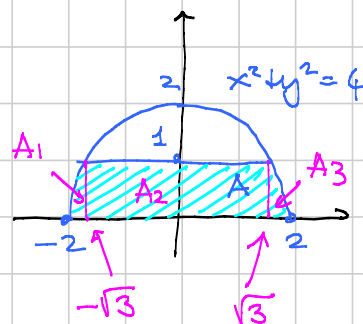
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$$



Esempio 11

Per scriverlo come normale rispetto all'asse x occorre dividere in 3 pezzi e devo anche calcolare le ascisse dei p.t. di intersezione



$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -2 \leq x \leq -\sqrt{3}, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

↑ parte alta circouf.

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, 0 \leq y \leq 1\} = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \times [0, 1]$$

rettangolo

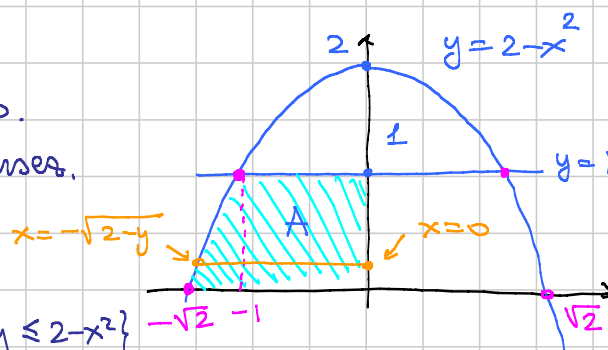
$$A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \sqrt{3} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

Come insieme normale rispetto all'asse y basta un pezzo solo

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$$

Esempio 12

Per scriverlo come normale risp. asse x occorre calcolare le interse. e usare 2 pezzi



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -\sqrt{2} \leq x \leq -1, 0 \leq y \leq 2-x^2\}$$

$$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$$

↑ rettangolo $[-1, 0] \times [0, 1]$

Normale rispetto all'asse y basta un pezzo solo

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{2-y} \leq x \leq 0\}$$

Esempio 13

Basta un pezzo solo in entrambi
i versi

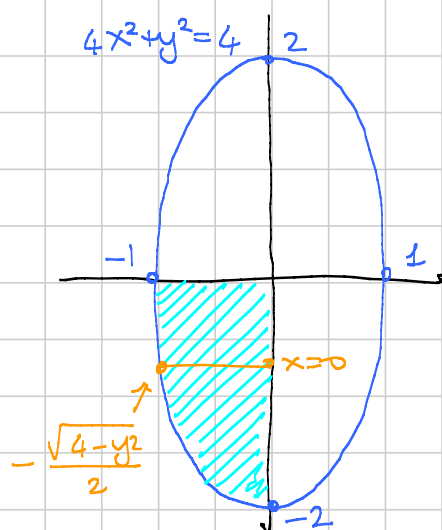
$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0,$$

$$-\sqrt{4-4x^2} \leq y \leq 0 \} \quad (\text{asse } x)$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 0,$$

$$-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2} \leq x \leq 0 \}$$

— o — o —



ANALISI 2

LEZIONE 27

[In differita per coronavirus]

Note Title

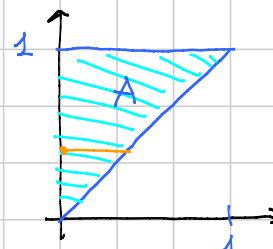
27/03/2020

Integrali doppi su insiemi normali (Lezioni 23/24 di AM2-14)Esempio 1 $\iint_A (x^2 + y) dx dy$ 1° modo Normale asse x

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy (x^2 + y) = \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x}^{y=1}$$

$$= \int_0^1 dx \left\{ x^2 + \frac{1}{2} - x^3 - \frac{x^2}{2} \right\} = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x^2 - x^3 \right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{6+2-3}{12} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

2° modo Normale asse y

$$\int_0^1 dy \int_0^y dx (x^2 + y) = \int_0^1 dy \left[\frac{1}{3} x^3 + yx \right]_{x=0}^{x=y} = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{3} y^3 + y^2 \right\} dy$$

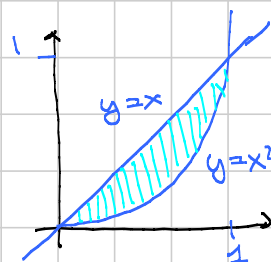
$$= \left[\frac{1}{12} y^4 + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{12}} \quad \text{☺}$$

Oss. Svolgere i calcoli in 2 modi è ottimo per verificare la correttezza. In questo caso "normale asse y" era più comodo, perché c'era estremo $y=0$ nell'integrale interno.

Esempio 2 $\iint_A (x^2 + xy^2) dx dy$ $\iint_A y dx dy$

$$\textcircled{1} = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy (x^2 + xy^2)$$

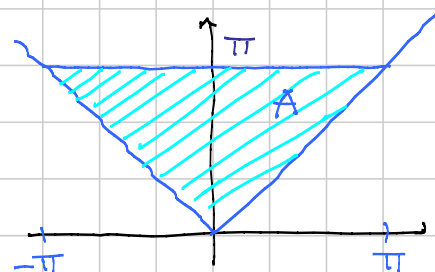
$$= \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} x y^3 \right]_{y=x^2}^{y=x} = \int_0^1 dx \left\{ x^3 + \frac{1}{3} x^4 - x^4 - \frac{1}{3} x^7 \right\} = \text{si fa}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \cdot y = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x^2}^{y=x} = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

Esempio 3 $\iint_A x^2 \sin y \, dx \, dy = \textcircled{1}$

$$\iint_A y^2 \sin x \, dx \, dy = \textcircled{2}$$



Osserviamo subito che $\textcircled{2} = 0$

- $f(-x, y) = -f(x, y)$ **DISPARI IN x**
- insieme simmetrico rispetto all'asse y

Osserviamo anche che $\textcircled{1} > 0$ in quanto $f(x, y) \geq 0$ in A e non identicamente nulla.

Inoltre per simmetria posso integrare sul solo pezzo di destra e moltiplicare per 2 (la $f(x, y)$ è **PARI** in x).

$$\textcircled{1} = 2 \int_0^\pi dx \int_x^\pi dy \, x^2 \sin y = 2 \int_0^\pi x^2 dx \int_x^\pi \sin y \, dy$$

$$= 2 \int_0^\pi x^2 dx \left[-\cos y \right]_{y=x}^{y=\pi} = 2 \int_0^\pi x^2 (1 + \cos x) dx$$

$$= 2 \int_0^\pi x^2 dx + 2 \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx$$

"si fa con 2 passaggi per parti."

Si poteva impostare come insieme normale risp. all'asse y :

$$\textcircled{1} = 2 \int_0^\pi dy \int_0^y dx \, x^2 \sin y = 2 \int_0^\pi \sin y \, dy \int_0^y x^2 dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^\pi y^3 \sin y \, dy$$

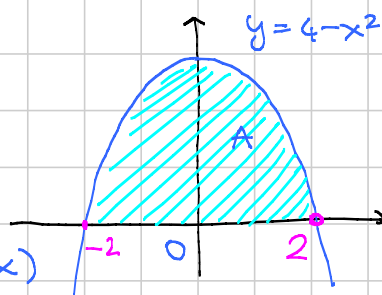
"si fa con 3 passaggi per parti"

Esempio 4 $\iint_A x^2 y \, dx \, dy = \textcircled{1}$

$\iint_A x y^2 \, dx \, dy = \textcircled{2}$

Osseviamo che $\textcircled{2} = 0$ ($f(x,y)$ dispari in x)
e che $\textcircled{1} > 0$ ed è uguale al doppio
dell'integrale nella parte destra (o sinistra) [$f(x,y)$ pari in x]

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \int_0^2 dx \int_0^{4-x^2} dy \, x^2 y = \int_0^2 x^2 dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=4-x^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 (4-x^2)^2 dx = \text{si fa facile} \end{aligned}$$



Esempio 5 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^8 \leq y \leq x^9 \leq e^9\}$

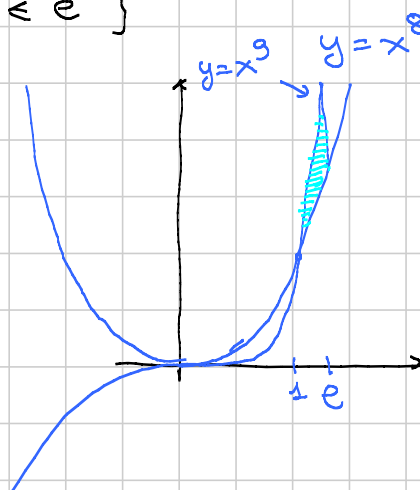
Come è fatto A insieme? Vedi figura

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq e, x^8 \leq y \leq x^9\}$

↑
normale axe x

$$\iint_A \frac{1}{xy} \, dx \, dy = \int_1^e dx \int_{x^8}^{x^9} dy \, \frac{1}{xy}$$

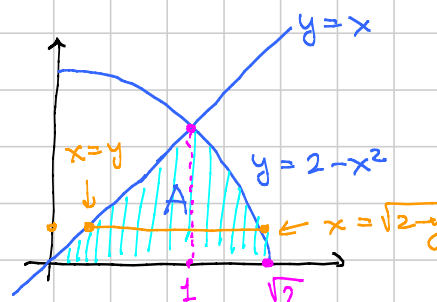
$$\begin{aligned} &= \int_1^e \frac{1}{x} dx \int_{x^8}^{x^9} \frac{1}{y} dy = \int_1^e \frac{1}{x} dx [\log y]_{y=x^8}^{y=x^9} \quad (\text{Precorso!}) \\ &= \int_1^e \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2} [\log^2 x]_{x=1}^{x=e} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Esempio 6 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq x, y \leq 2-x^2\}$

$\iint_A x \, dx \, dy$

$\iint_A y \, dx \, dy$



$$\begin{aligned}
 \iint_A x \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \, x + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{2-x^2} dy \, x \\
 &= \int_0^1 x \, dx \int_0^x 1 \, dy + \int_1^{\sqrt{2}} x \, dx \int_0^{2-x^2} dy \\
 &= \int_0^1 x^2 \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} x(2-x^2) \, dx = \text{si fa.}
 \end{aligned}$$

Se lo facevo normale rispetto all'asse y diventava

$$\begin{aligned}
 \iint_A x \, dx \, dy &= \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y}} dx \, x = \int_0^1 dy \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=y}^{x=\sqrt{2-y}} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (2-y-\frac{y^2}{2}) dy = \text{banale in un pezzo solo 😊}
 \end{aligned}$$

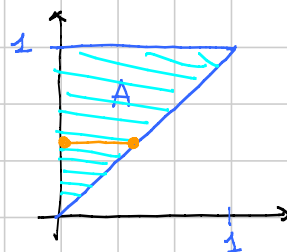
[Esercizio di integrazione corretto dopo video]

Esempio 7 $\iint_A x e^{y^3} \, dx \, dy$

Normale risp. asse x :

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \, x e^{y^3} = \int_0^1 x \, dx \int_x^1 e^{y^3} \, dy$$

↑ Non so fare la primitiva 😞



Normale risp. asse y :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dy \int_0^y dx \, x e^{y^3} &= \int_0^1 e^{y^3} dy \int_0^y x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} [e^{y^3}]_{y=0}^{y=1} = \frac{e-1}{6}
 \end{aligned}$$

Oss (molto hard) Se uno non si arrende, veniva anche con il 1° approccio!

Non so fare la primitiva di e^{y^3} . La chiamo $F(y)$ (esiste per analisi 1).

$$\int_0^1 x dx \int_x^1 e^{y^3} dy = \int_0^1 x dx [F(y)]_{y=x}^{y=1} =$$

$$= \int_0^1 \{x F(1) - x F(x)\} dx$$

$$= F(1) \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x F(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} F(1) - \left[\frac{1}{2} x^2 F(x) - \int \frac{x^2}{2} F'(x) dx \right]_0^1$$

$$= \cancel{\frac{1}{2} F(1)} - \cancel{\frac{1}{2} F(1)} + \int_0^1 \frac{x^2}{2} e^{x^3} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$$

e questo si fa come sopra.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 27

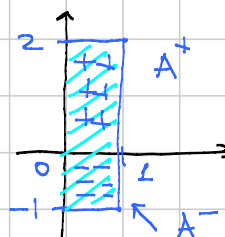
[In differita per coronavirus]

Note Title

27/03/2020

Integrali doppi con valori assoluti

Esempio 1 $\iint_A |y| dx dy$ $A = [0, 1] \times [-1, 2]$

Domanda: qual è il segno di y ?

$$\iint_A |y| dx dy = \iint_{A^+} y dx dy + \iint_{A^-} (-y) dx dy$$

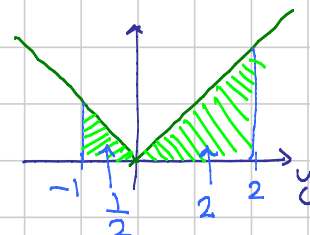
$$= \iint_{A^+} y dx dy - \iint_{A^-} y dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dy y - \int_0^1 dx \int_{-1}^0 dy y = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2} - \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=-1}^{y=0}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (4 - 0 - 0 + 1) dx = \frac{5}{2}$$

Oss. In questo caso semplice si poteva fare direttamente

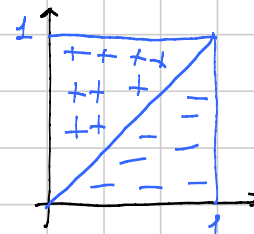
$$\iint_A |y| dx dy = \int_0^1 dx \int_{-1}^2 dy |y| = \frac{5}{2} \int_0^1 dx = \frac{5}{2}$$



Esempio 2 $A = [0, 1] \times [0, 1]$ $\iint_A |y-x| dx dy$

$$\begin{aligned} \iint_{A^+} (y-x) dx dy &= \int_0^1 dx \int_x^1 dy (y-x) \\ &= \int_0^1 dy \int_0^y dx (y-x) \end{aligned}$$

asse x
↓
asse y



$$\iint_{A^-} (x-y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy (x-y) \quad \text{Così si fa.}$$

Alla fine i 2 risultati vanno sommati.

Oss. In questo caso dico che $\iint_{A^+} |y-x| = \iint_{A^-} |y-x|$, quindi

basta calcolare uno dei 2 e moltiplicare per 2 !!!

Formalmente: Se scambio x e y (simmetria risp. bisettrice)

→ A^+ diventa A^- e viceversa

→ l'integrandola resta la stessa

$$\iint_A |y-x| dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy (x-y)$$

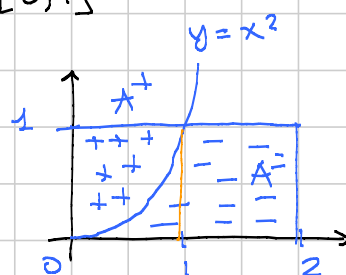
Esempio 3 $\iint_A |y-x^2|$ $A = [0, 2] \times [0, 1]$

1° modo Solito spezzamento in A^+ e A^-

$$\iint_A |y-x^2| dx dy = \iint_{A^+} (y-x^2) dx dy$$

$$- \iint_{A^-} (y-x^2) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 dy (y-x^2) - \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy (y-x^2) - \int_1^2 dx \int_0^1 dy (y-x^2)$$



Questi 3 integrali si fanno facilmente.

2° modo $\iint_A (y-x^2) dx dy = \iint_{A^+} (y-x^2) dx dy + \iint_{A^-} (y-x^2) dx dy$

da cui $\iint_{A^-} (y-x^2) = \iint_A (y-x^2) - \iint_{A^+} (y-x^2)$ e quindi

$$\iint_A |y-x^2| dx dy = 2 \iint_{A^+} (y-x^2) dx dy - \iint_A (y-x^2) dx dy$$

e in conclusione

$$\iint_A |y-x^2| dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 dy (y-x^2) - \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy (y-x^2)$$

Esempio 4 $\iint_A |y-\sin x| dx dy$

$$A = [0, \pi] \times [0, \frac{1}{2}]$$

A^+ è fatto dai 2 pezzi "dattuali"

A^- è fatto da 3 pezzi "sotto"



Quindi dovrai spezzare in 5 parti

$$\iint_A |y-\sin x| = \iint_{A^+} (y-\sin x) - \iint_{A^-} (y-\sin x)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} dx \int_{\sin x}^{\frac{1}{2}} dy (y-\sin x) + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^{\frac{1}{2}} dy (y-\sin x) \quad A^+$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{6}} dx \int_0^{\sin x} dy (y-\sin x) - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} dx \int_0^{\frac{1}{2}} dy (...) - \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} dx \int_0^{\sin x} dy (y-\sin x)$$

così sono 5 integrali da calcolare.

Con ragionamenti di simmetria si vede che $1^o = 2^o$ e $3^o = 5^o$, ma restano comunque 3.

C'è però un modo di farne solo due.

$$\begin{aligned} \iint_A |f| &= \iint_{A^+} f - \iint_{A^-} f \quad ; \quad \iint_A f = \iint_{A^+} f + \underbrace{\iint_{A^-} f}_{\text{ricavo e sostituisco nella } 1^a} \\ &= 2 \iint_{A^+} f - \iint_A f \end{aligned}$$

e quindi nel vostro caso

$$\iint_A |y-\sin x| dx dy = 2 \iint_{A^+} (y-\sin x) dx dy - \iint_A (y-\sin x) dx dy$$

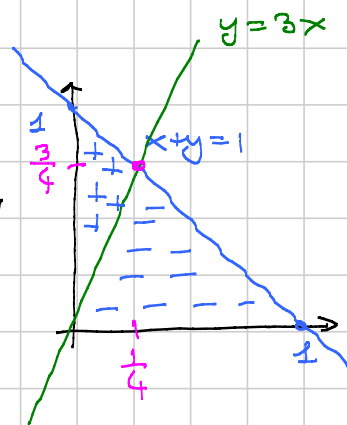
$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} dx \int_{\sin x}^{\frac{1}{2}} dy (y - \sin x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}} dy (y - \sin x)$$

Questi si fanno e sono solo due.

Fatto generale: lavorare per differenza può essere utile !!

Esempio 5 $\iint_A |y - 3x| dx dy$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$



$$\iint_{A^+} (y - 3x) dx dy - \iint_{A^-} (y - 3x) dx dy$$

$$\iint_{A^+} (y - 3x) dx dy = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_{3x}^{1-x} dy (y - 3x)$$

$$\iint_{A^-} (y - 3x) dx dy = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_0^{3x} dy (y - 3x) + \int_{\frac{1}{4}}^1 dx \int_0^{1-x} dy (y - 3x)$$

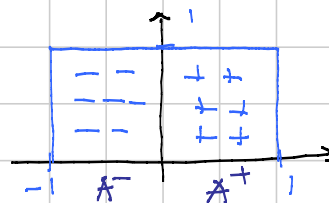
$$= \int_0^{\frac{1}{4}} dy \int_{\frac{1}{3}y}^{1-y} dx (y - 3x) \quad \text{così viene un integrale solo!}$$

asse x
asse y

Esempio 6 $\iint_A (y - 3|x|) dx dy \quad [-1, 1] \times [0, 1]$

$$\iint_A y dx dy - 3 \iint_A |x| dx dy$$

$$= 2 \iint_{A^+} y dx dy - 6 \iint_{A^+} x dx dy$$



Ora osservo per simmetria che $\iint_{A^+} y dx dy = \iint_{A^+} x dx dy$

↑
scambio x con y

quindi

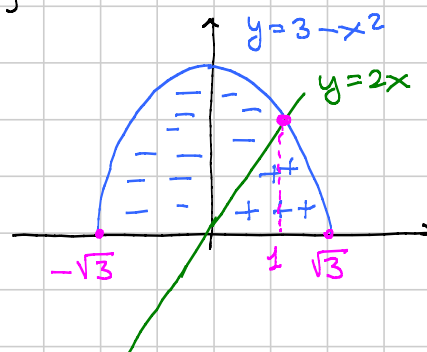
$$\begin{aligned}\iint_A (y-3|x|) dx dy &= -4 \iint_{A^+} x dx dy = -4 \int_0^1 x dx \int_0^1 dy \\ &= -4 \int_0^1 x dx = -2.\end{aligned}$$

Esempio 7 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 3-x^2\}$

$$\iint_A |2x-y| dx dy$$

$$= \iint_{A^+} (2x-y) dx dy - \iint_{A^-} (2x-y) dx dy$$

oppure $= 2 \iint_{A^+} (2x-y) dx dy - \iint_A (2x-y) dx dy$



Ora

$$\begin{aligned}\iint_A (2x-y) dx dy &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{3-x^2} dy (2x-y) \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{3-x^2} (-y) dy\end{aligned}$$

↑ l'integrale di x viene = 0 per simmetria

$$\iint_{A^+} (2x-y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy (2x-y) + \int_1^{\sqrt{3}} dx \int_0^{3-x^2} dy (2x-y)$$

e questi conti ora vanno fatti.

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 29
[In differita per coronavirus]

Note Title

27/03/2020

Utilizzo delle coordinate polari negli integrali doppi (lez. 27 AM2-14)

Esempio 1 $\iint_{S_{NE}} x \, dx \, dy$

Descrivo S_{NE} in coord. polari

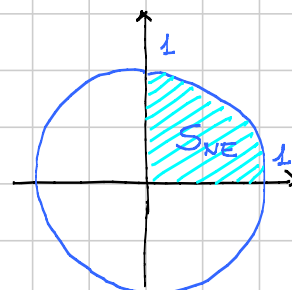
$$0 \leq \rho \leq 1 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

descrizione di tipo rettangolo

L' integrale diventa

$$\underbrace{\int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta}_{\text{descrizione insieme in coord. polari}} \quad \underbrace{\rho \cos \theta}_{\substack{x \text{ in coord.} \\ \text{polari}}} \quad \underbrace{\rho}_{\substack{\uparrow \text{raggio}}} \quad \underbrace{\cos \theta}_{\substack{\uparrow \text{proiezione}}} \quad \underbrace{d\rho \, d\theta}_{\substack{\uparrow \text{area element}}}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \rho^2 \, d\rho}_{\frac{1}{3}} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta}_1 = \frac{1}{3}$$



Oss. Posso calcolare l' integrale pensando S_{NE} come insieme normale risp. asse x

$$\iint_{S_{NE}} x \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy = \int_0^1 x \, dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy$$

$$= \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} \quad \text{☺}$$

↑
VERIFICA !!!

$$\begin{aligned} \iint_{S_{NE}} x \, dx \, dy &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx = \int_0^1 dy \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y^2) \, dy = \frac{1}{2} \left[y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Esempio 2 $\iint_{SE} x^2 dx dy$

In coord. polari diventa

$$\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \underbrace{\rho^2 \cos^2 \theta}_{x^2} \overset{\text{pag.}}{\rho} = \int_0^1 \rho^3 d\rho \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta}_{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{16}$$

Fatto generale (analisi 1): l'integrale di $\cos^2 \theta$ e di $\sin^2 \theta$ su intervalli i cui estremi sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$ è sempre uguale alla metà della lunghezza dell'intervallo.

[Dim: l'integrale di $\cos^2 \theta$ e di $\sin^2 \theta$ sono uguali per ragioni di simmetria, e la loro somma è l'integrale di 1, cioè la lunghezza]

Se lo volevo fare come insieme unitario

$$\iint_{S_{NE}} x^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy x^2 = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{☹}$$

↑
asse x

(serve sostituz. trig o altro)

$$= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy \quad \text{☹ ☹}$$

Esempio 3 $\iint_{S_{NE}} y dx dy = \frac{1}{3}$ $\iint_{S_{NE}} y^2 dx dy = \frac{\pi}{16}$

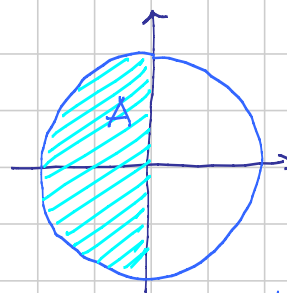
Sono uguali ai precedenti per ragioni di simmetria!

$$\iint_{S_{SW}} y dx dy = \iint_{S_{SE}} y dx dy = -\frac{1}{3} \quad \text{(simmetria!)}$$

$$\iint_{S_{NW}} x^2 dx dy = \iint_{S_{SW}} y^2 dx dy = \frac{\pi}{16} \quad (\quad = \quad)$$

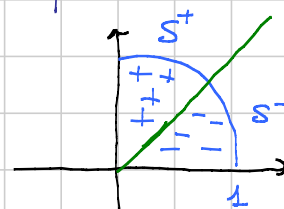
Esempio 4 $\iint_A |y| \, dx \, dy = \frac{2}{3}$

$$\iint_A y^2 \, dx \, dy = \frac{\pi}{8}$$



Esempio 5 $\iint_{S_{NE}} |y-x| \, dx \, dy$

$$= \iint_{S^+} (y-x) \, dx \, dy - \iint_{S^-} (y-x) \, dx \, dy$$



Posso calcolare entrambi in coord. polari, o calcolarne solo uno e poi moltiplicare per 2 (giustificare per bene la simmetria)

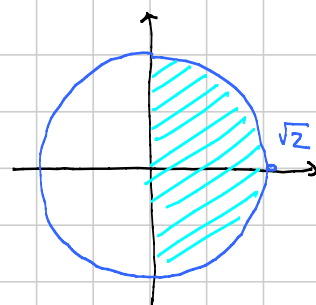
$$\iint_{S^+} (y-x) \, dx \, dy = \underbrace{\int_0^1 \rho \, d\rho}_{S^+} \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta}_{\text{pag.}} \underbrace{\rho(\sin\theta - \cos\theta)}_{y-x} \cdot \underbrace{\rho}_{\text{pag.}}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \rho^2 \, d\rho}_{\frac{1}{3}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - \cos\theta) \, d\theta = \frac{1}{3} [-\cos\theta - \sin\theta]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \text{si fa} \dots$$

Esempio 6 $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0\}$

$$\iint_A x^2 \, dx \, dy$$

$$\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$



$$\iint_A x^2 \, dx \, dy = \int_0^{\sqrt{2}} \rho \, d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \, \rho^2 \cos^2\theta \, \rho$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4$$

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2} dx dy = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \quad \rho \cdot \rho = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho = \pi \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

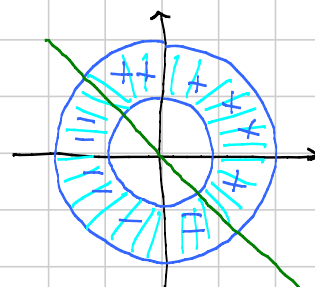
Esempio 7 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

$$\iint_A |x+y| dx dy = 2 \iint_{A^+} (x+y) dx dy$$

$$= 2 \int_1^2 \rho d\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \rho (\cos\theta + \sin\theta) \rho d\theta$$

$$= 2 \int_1^2 \rho^2 d\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta$$

con qualche conto si fanno

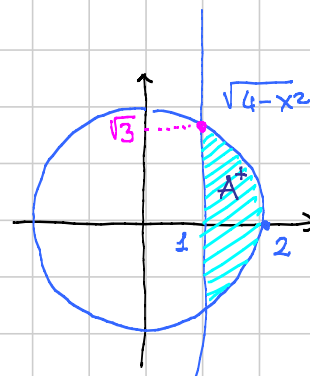


Oss. Pensare a cosa verrebbe fatto spezzando in insiemi normali

Esempio 8 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, x \geq 1\}$

$$\iint_A x dx dy > 0 \quad \iint_A y dx dy = 0$$

↑
simmetria



1° modo $\iint_A x dx dy = 2 \iint_{A^+} x dx dy$

$$= 2 \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \quad x = 2 \int_1^2 x \sqrt{4-x^2} dx = \text{si fa come esempio prec.}$$

↑
normale
asse x

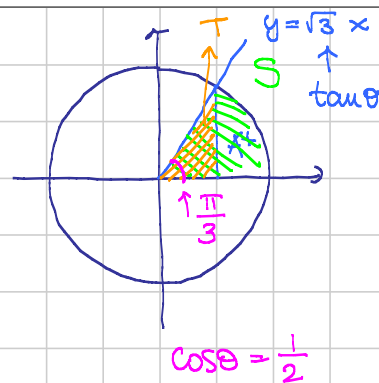
2° modo $2 \iint_{A^+} x dx dy = 2 \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_1^{\sqrt{4-y^2}} dx \quad x = \int_0^{\sqrt{3}} dy [x^2]_{x=1}^{x=\sqrt{4-y^2}}$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} dy (4-y^2-1) = \text{si fa facile}$$

3° modo Per differenza

$A^+ =$ tutto settore - triangolo

$$\begin{aligned} \iint_{A^+} x \, dx \, dy &= \iint_S x \, dx \, dy - \iint_T x \, dx \, dy \\ &\quad \text{polari} \qquad \text{norm. anse} \times \\ &= \int_0^2 dp \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \, p \cos \theta \, p - \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{3}x} dy \, x \\ &\quad \text{si fanno entrambi facilmente} \end{aligned}$$



4° modo Polari dirette !!

Il problema è descrivere A^+

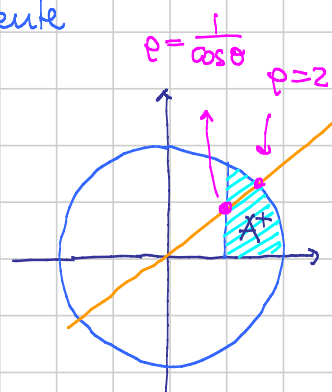
$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

$$x \geq 1$$

$$p \cos \theta \geq 1$$

$$p \geq \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\frac{1}{\cos \theta} \leq p \leq 2$$



$$\iint_{A^+} x \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta}}^2 dp \, p \cos \theta \cdot p$$

[Cambiato $\frac{\pi}{3}$ in $\frac{\pi}{6}$ dopo video]

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta \, d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta}}^2 p^2 \, dp = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta \, d\theta \left[\frac{1}{3} p^3 \right]_{p=\frac{1}{\cos \theta}}^{p=2}$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta \left(8 - \frac{1}{\cos^3 \theta} \right) d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(8 \cos \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta$$

- si fa facile (la primitiva di $\frac{1}{\cos^2 \theta}$ è $\tan \theta$)

[Controllare che nei 4 modi venga uguale e imparare per bene i 4 modi !!!]

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 30
[In differita per coronavirus]

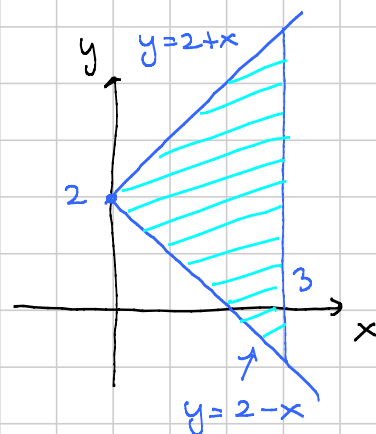
Note Title

27/03/2020

Cambi di variabile negli integrali doppi (Lezione 28 di A12-14)Esempio 1 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y-2| \leq x \leq 3\}$

$$\iint_A (y-2) dx dy \quad \iint_A x^7 dx dy$$

Entrambi gli integrali si fanno facilmente scrivendo A come insieme normale risp. asse x



Tuttavia potremmo porre

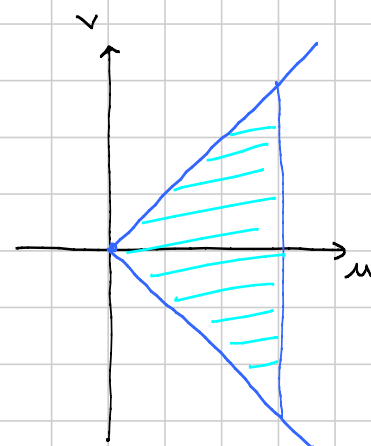
$$x = u \quad y-2 = v$$

[corretto dopo video]

In questo modo

$$A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |v| \leq u \leq 3\}$$

In poche parole, abbiamo spostato l'origine nel vertice del triangolo



$$\iint_A (y-2) dx dy = \iint_{\text{nuovo } A} v J(u, v) du dv$$

$\uparrow$ nuovo A
 $|v| \leq u \leq 3$
 $\uparrow$ [Dopo video]
 $\uparrow$ pagamento da calcolare

Calcolo $J(u, v)$:

① Ricavare $x = u \quad y = v+2$

② Costruire matrice Jacobiana $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

③ $J(u, v) = |\text{Det}| = 1$

L'integrale diventa $\iint_{\text{nuovo } A} v du dv = 0$ per simmetria

Analogamente per il 2° integrale:

$$\begin{aligned} \iint_A x^7 dx dy &= \iint_{\text{nuovo } A} u^7 \cdot 1 \cdot du dv = \int_0^3 du \int_{-u}^u dv u^7 \\ &= \int_0^3 u^7 du \int_{-u}^u dv = 2 \int_0^3 u^8 du = \text{si fa.} \end{aligned}$$

Esempio 2 $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 4 \}$
 circ. con centro in $(2, -3)$ e raggio 2

$$\iint_C x dx dy \quad \iint_C y^2 dx dy$$

Uno vorrebbe portare il centro nell'origine e usare coord. polari

$$x-2 = u \quad y+3 = v \quad u^2 + v^2 \leq 4$$

$$\iint_C x dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (u+2) \underbrace{J(u, v)}_1 du dv$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (u+2) du dv = 2 \text{ Area}(C) = 2 \cdot 4\pi = 8\pi$$

$\uparrow$
= 0 per simmetria

$$\iint_C y^2 dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (v-3)^2 du dv = \int_{u^2+v^2 \leq 4} (v^2 - 6v + 9) du dv$$

$\downarrow$
per simm

$\hookrightarrow$ 9 Area

$$= 9 \cdot 4\pi + \iint_{u^2+v^2 \leq 4} v^2 du dv$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{coord. polari}}$

$$= 36\pi + \int_0^2 dp \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{p^2 \sin^2 \theta \cdot p}_{\text{pag. delle polari}} = 36\pi + \underbrace{\int_0^2 p^3 dp}_4 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{11}$$

$= 40\pi$

Esempio 3 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$

$$\iint_A |x-2| dx dy$$

Come è fatto A? $x^2 - 2x + y^2 \leq 0$

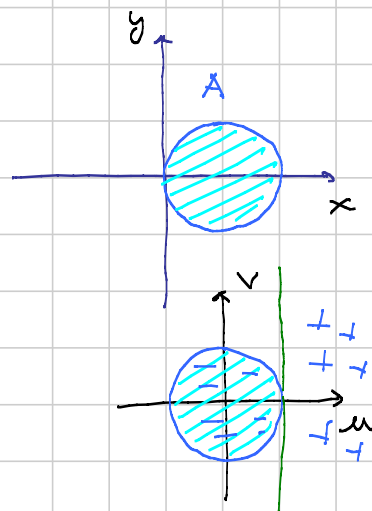
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1$$

$$\underbrace{(x-1)}_u^2 + \underbrace{y^2}_v \leq 1$$

$$\iint_A |x-2| dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} |u-1| \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ J(u,v)}}{1} du dv$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (1-u) du dv = \text{Area} = \pi \quad \text{☺}$$

↓
= 0 per
simmetria



Fatto generale Quando il cambio di variabili è una trasformazione AFFINE, allora $J(u,v) = |\text{Det}|$ della "parte di matrice" della trasformazione

$$\begin{aligned} x &= au + bv + e \\ y &= cu + dv + f \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad J(u,v) = |ad-bc|$$

In particolare, se la trasformazione è una ISOMETRIA, allora di sicuro $J(u,v) = 1$.

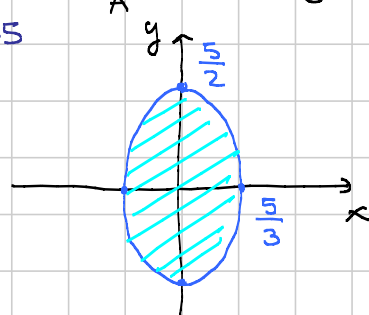
Negli esempi precedenti le trasformazioni erano traslazioni, dunque isometrie, dunque NULLA DA PAGARE.

Esempio 4 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 \leq 25\}$

$$\iint_A |xy| dx dy$$

$$\underbrace{(3x)}_u^2 + \underbrace{(2y)}_v^2 \leq 25$$

Nelle variabili u e v l'insieme è diventato $u^2 + v^2 \leq 25$, cioè una circ.



Calcoliamo $J(u, v)$

$$\textcircled{1} \quad x = \frac{u}{3} \quad y = \frac{v}{2} \quad \textcircled{2} \quad \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \textcircled{3} \quad J = \frac{1}{6}$$

Ora è fatta

$$\iint_A |xy| dx dy = \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 25 \\ \text{Nuovo } A}} \left| \frac{u}{3} \frac{v}{2} \right| \cdot \frac{1}{6} du dv$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $x \quad y \quad J$

$$= \frac{1}{36} \iint_{u^2+v^2 \leq 25} |uv| du dv = \frac{4}{36} \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 25 \\ u \geq 0, v \geq 0}} uv du dv$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^5 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \quad \rho \cos \theta \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho$$

$\underbrace{\int_0^5 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta}_{\text{1° quadrante}} \quad \uparrow \text{ } J \text{ delle parti}$

$$= \frac{1}{9} \int_0^5 \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta$$

La primitiva è $\frac{1}{2} \sin^2 \theta$ e poi è storia.

Esempio 5 $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 5y \}$

$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$$

$$x^2 + 4y^2 - 5y \leq 0 ; \quad x^2 + 4y^2 - 5y + \frac{25}{16} \leq \frac{25}{16}$$

$$\underbrace{(x)^2}_{\parallel u} + \underbrace{\left(2y - \frac{5}{4}\right)^2}_{\parallel v} \leq \frac{25}{16} \quad [\text{Verifica !!!}]$$

Poniamo $x = u$ $2y - \frac{5}{4} = v$ e $\mathcal{Q}$ insieme diventa $u^2 + v^2 \leq \frac{25}{16}$

Calcolo $J(u, v)$: $x = u$ $y = \frac{v}{2} + \frac{5}{8} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow J(u, v) = \frac{1}{2}$

$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{u^2 + v^2 \leq \frac{25}{16}} \left\{ u^2 + \left(\frac{v}{2} + \frac{5}{8} \right)^2 \right\} \cdot \frac{1}{2} du dv$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{u^2 + v^2 \leq \frac{25}{16}} \left(u^2 + \frac{v^2}{4} + \frac{25}{64} + \frac{5}{8}v \right) du dv$$

[corretto dopo video]
 0 per simmetria

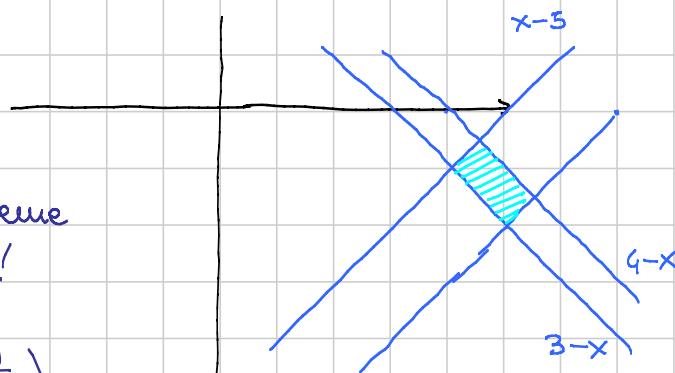
$$= \frac{25}{32} \cdot \text{Area (cerchio)} + \frac{1}{2} \iint_{u^2 + v^2 \leq \frac{25}{16}} \left(u^2 + \frac{v^2}{4} \right)$$

$$= \frac{5}{4} \iint_{\dots} u^2 du dv \quad \text{e questo si fa}$$

Esempio 6 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{3 \leq x+y}_{u} \leq \underbrace{4}_{v}, \underbrace{5 \leq x-y}_{v} \leq \underbrace{7}_{v}\}$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy$$

L'insieme è un rettangolo ruotato, e si scrive come insieme normale usando tanti pezzi !!!
 "3"



$$\begin{aligned} u &= x+y & x &= \frac{u+v}{2} \\ v &= x-y & y &= \frac{u-v}{2} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad J(u,v) = \frac{1}{2}$$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \iint_{\substack{3 \leq u \leq 4 \\ 5 \leq v \leq 7}} \underbrace{uv}_{(x^2 - y^2)} \cdot \frac{1}{2} du dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_3^4 du \int_5^7 dv \, uv = \frac{1}{2} \int_3^4 u du \int_5^7 v dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (16-9)(49-25).$$



ANALISI 2

LEZIONE 31

[In differita per coronavirus]

Note Title

01/04/2020

Integrali tripli Prerequisiti: LEZIONI 25/26 di AM2-14

Formula di spezzamento: $\rightarrow$ sui parallelepipedi $3 = 1+1+1$
 $\rightarrow$ per colonne $3 = 2+1$
 $\rightarrow$ per sezioni $3 = 1+2$

Esempio 1 $A = [0, 1] \times [2, 3] \times [4, 5]$ $\iint_A (xy+z) dx dy dz$

$$= \int_0^1 dx \int_2^3 dy \int_4^5 dz (xy+z) = \frac{5}{4} + \frac{9}{2}$$

$$\int_0^1 dx \int_2^3 dy \int_4^5 xy dz = \int_0^1 x dx \int_2^3 y dy \underbrace{\int_4^5 1 dz}_1 = \int_0^1 x dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=2}^{y=3}$$

$$= \frac{5}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{4}$$

$$\int_0^1 dx \int_2^3 dy \int_4^5 dz z = \int_0^1 dx \int_2^3 dy \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=4}^{z=5} = \frac{9}{2} \underbrace{\int_0^1 dx \int_2^3 dy}_{\text{area di } [0,1] \times [2,3] = 1} = \frac{9}{2}$$

Oss. Posso scegliere a piacere in che ordine gestire le 3 variabili.
 Ad esempio il secondo lo potevo gestire come

$$\int_4^5 dz \int_2^3 dy \int_0^1 dx z = \int_4^5 dz \underbrace{\int_2^3 dy \int_0^1 dx \cdot 1}_{\text{Area}=1} = \int_4^5 z dz = \dots$$

Esempio 2 $A = [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 2]$ $f(x, y, z) = \sin(x+y) \cdot z$

$$\int_0^\pi dx \int_0^\pi dy \int_0^2 dz z \cdot \sin(x+y) = \int_0^\pi dx \int_0^\pi dy \sin(x+y) \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=2}$$

$$2 \int_0^\pi dx \int_0^\pi dy \sin(x+y) = 2 \int_0^\pi dx \left[-\cos(x+y) \right]_{y=0}^{y=\pi} = \dots \text{ si fa}$$

Esempio 3 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1}_{\text{base}}, \underbrace{0 \leq z \leq x+y}_{\text{colonna}}\}$

$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz$ insieme normale rispetto al piano xy

Uso la formula di riduzione per colonne

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} dz \cdot z = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy [z^2]_{z=0}^{z=x+y}$$

↑ integrale sulla colonna

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy (x+y)^2 = \text{si fa facilmente}$$

Esempio 4 $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$

$$\iiint_C z \, dx \, dy \, dz$$

$$\iiint_C (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

Possiamo pensare C come insieme normale risp. al piano xy e integrare per colonne

$$\iiint_C z \, dx \, dy \, dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} dx \, dy \int_0^3 dz \cdot z$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 2} dx \, dy [z^2]_{z=0}^{z=3} = \frac{9}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 2} 1 \cdot dx \, dy = 9\pi$$

area cerchio

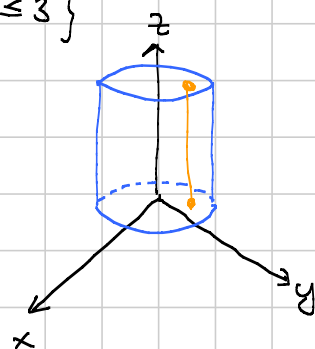
$$\iiint_C (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} dx \, dy \int_0^3 dz (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= \iint dx \, dy \left[(x^2 + y^2)z + \frac{1}{3}z^3 \right]_{z=0}^{z=3} = \iint dx \, dy [3(x^2 + y^2) + 9]$$

$$= 9 \text{ Area} + 3 \int_0^2 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \, \rho^2 \cdot \rho = 18\pi + 2\pi \left[\frac{3}{4} \rho^4 \right]_{\rho=0}^{\rho=2}$$

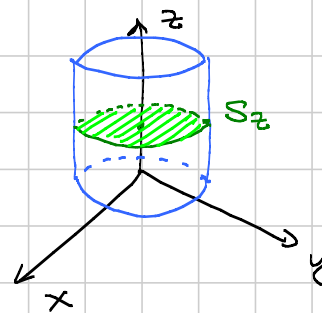
pag.

$$= 18\pi + 24\pi = 42\pi$$



In alternativa potevo ragionare per sezioni

$$\begin{aligned}
 \iiint_C z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 dz \iint_{S_z} z \, dx \, dy \\
 &= \int_0^3 z \, dz \underbrace{\iint_{S_z} 1 \, dx \, dy}_{\text{area}(S_z) = 2\pi} \\
 &= 2\pi \int_0^3 z \, dz = \pi [z^2]_{z=0}^{z=3} = 9\pi \quad (5)
 \end{aligned}$$



Calcolare d'altro per sezioni poteva essere fastidioso, quindi conviene spezzare

$$\iiint_C z^2 \, dx \, dy \, dz = \int_0^3 z^2 \, dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy = 2\pi \int_0^3 z^2 \, dz = 18\pi$$

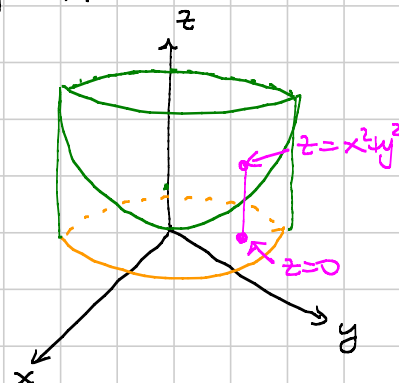
↑
sezioni

$$\begin{aligned}
 \iiint_C (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \underbrace{\int_0^3 1 \, dz}_{=3} = 3 \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\
 &= \text{si fa.}
 \end{aligned}$$

Esempio 5 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 1\} = A$

$$\iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz$$

↑ sono i punti che stanno nel cilindro, ma sotto il paraboloide



Descrizione come insieme normale

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\text{base}} \mid \underbrace{0 \leq z \leq x^2 + y^2}_{\text{columna}}\}$$

per colonne

$$\downarrow \quad = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} dx \, dy \int_0^{x^2 + y^2} dz \, z^2 = \frac{1}{3} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} dx \, dy [z^3]_{z=0}^{z=x^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)^3 \, dx \, dy = \frac{1}{3} \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \, \rho^6 \cdot \rho = \frac{2\pi}{3} \left[\frac{1}{8} \rho^8 \right]_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

Si poteva fare per sezioni? Sì, a patto di capire come sono fatte!

Fissato $z \in [0, 1]$, la sezione S_z sono $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: z \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$
 corona circolare con raggio interno $\sqrt{z}$ e raggio est. 1

$$\begin{aligned} \iiint_A z^2 dx dy dz &= \int_0^1 dz \underset{\text{sezioni}}{z^2} \iint_{S_z} 1 dx dy = \int_0^1 z^2 \cdot \text{Area}(S_z) dz \\ &= \int_0^1 z^2 \pi (1 - z) dz = \pi \int_0^1 (z^2 - z^3) dz = \pi \left[\frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 \right]_{z=0}^{z=1} \\ &= \frac{\pi}{12} \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Oss. Il conto nei 2 casi è completamente diverso, quindi è utilissimo farlo in 2 modi diversi per VERIFICA.

Esempio 6 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \underbrace{x^2 + y^2 \leq 4}_{\text{cilindro}}, \underbrace{z \in [0, 2]}_{\text{mezzo cilindro}}, \underbrace{x \geq 0}_{\text{mezzo cilindro}}\}$

$$\iiint_A (x + y + z) dx dy dz$$

$$\iiint_A y dx dy dz = 0 \quad \text{per simmetria } (x, y, z) \rightarrow (x, -y, z)$$

- La funzione è dispari
- L'insieme A viene mandato in sé.

$$\begin{aligned} \iiint_A x dx dy dz &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} x dx dy \int_0^2 dz = 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} x dx dy \\ &= 2 \int_0^2 dp \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \, p \cos \theta = 2 \int_0^2 p^2 dp \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 4 \left[\frac{1}{3} p^3 \right]_{p=0}^{p=2} \cdot \underbrace{\left[\sin \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=2} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

$$\iiint_A z dx dy dz = \int_0^2 dz \, z \cdot \text{Area}(S_z) = 2\pi \int_0^2 z dz = 4\pi.$$

ANALISI 2

-

LEZIONE 32

[In differita per coronavirus]

Note Title

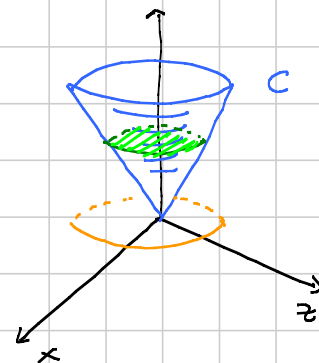
01/04/2020

Prequisiti: un retrogusto di coordinate cilindriche
 sostituire (x,y) con le polari

Esempio 1 (Corno rovesciato)

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,3], x^2+y^2 \leq z^2\}$$

$$\iiint_C z^2 dx dy dz$$



Modo per vedere che è un cono: ragionare per sezioni. Fissato $z \in [0,3]$ la sezione

$$S_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq z^2\} = \text{cerchio di raggio } z$$

(raggio dipende linearmente dall'altezza)

$$\begin{aligned} \iiint_C z^2 dx dy dz &= \int_0^3 dz \cdot z^2 \overset{\text{sezioni}}{\int_{S_z} dx dy} = \int_0^3 z^2 \cdot \text{Area}(S_z) dz \\ &= \pi \int_0^3 z^4 dz = \frac{\pi}{5} \cdot 3^5 \end{aligned}$$

Si poteva fare per colonne? Con un po' di pazienza forse sì.

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2 \leq 9}_{\text{base}}, \underbrace{\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 3}_{\text{colonna sul p.to } (x,y)}\}$$

$$\begin{aligned} \iiint_C z^2 dx dy dz &= \iint_{\text{base}} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^3 z^2 dz = \frac{1}{3} \iint_{\text{base}} dx dy [z^3]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=3} \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\text{base}} dx dy (27 - (x^2+y^2)^{3/2}) = 9 \text{ Area(Base)} - \frac{1}{3} \iint_{\text{base}} (x^2+y^2)^{3/2} dx dy \end{aligned}$$

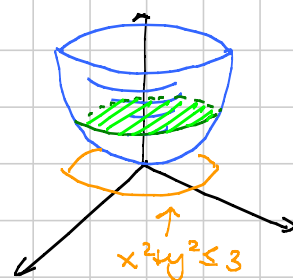
$$\begin{aligned}
 &= 9 \cdot 9\pi - \frac{1}{3} \int_0^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p^3 \cdot p = 81\pi - \frac{2\pi}{3} \int_0^3 p^4 dp \\
 &= 81\pi - \frac{2\pi}{3} \frac{1}{5} 3^5 \\
 &= 81\pi \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 81\pi \cdot \frac{3}{5} \quad \text{☺}
 \end{aligned}$$

Esempio 2 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 3], \underbrace{x^2 + y^2 \leq z}_{\text{paraboloidoide}}\}$

$$\iiint_A z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$$

per sezioni $= \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx \, dy \sqrt{x^2 + y^2} \cdot z$

↑
cerchio di raggio $\sqrt{z}$



$$= \int_0^3 z \, dz \iint_{S_z} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^3 z \, dz \int_0^{\sqrt{z}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p \cdot p$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^3 z \, dz \int_0^{\sqrt{z}} p^2 dp \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = 2\pi \frac{1}{3} \int_0^3 z \, dz [p^3]_{p=0}^{p=\sqrt{z}} \\
 &= \frac{2\pi}{3} \int_0^3 z^{\frac{5}{2}} dz = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2}{7} \left[z^{\frac{7}{2}} \right]_0^3
 \end{aligned}$$

per colonne bisogna scrivere A come insieme normale

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 3}_{\text{base}}, \underbrace{x^2 + y^2 \leq z \leq 3}_{\text{colonna}}\}$$

$$\iiint_A z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\text{base}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \int_{x^2 + y^2}^3 z \, dz$$

$$= \iint_{\text{base}} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{1}{2} [z^2]_{z=x^2+y^2}^{z=3} \, dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_{\text{base}} \sqrt{x^2 + y^2} (9 - (x^2 + y^2)^2) \, dx \, dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p(9-p^4) p = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (9p^2 - p^6) dp \\
 &= \pi \left[3p^3 - \frac{1}{7} p^7 \right]_{p=0}^{p=\sqrt{3}} \\
 &= \text{controllare i conti}
 \end{aligned}$$

[Qualche conto corretto dopo i video]

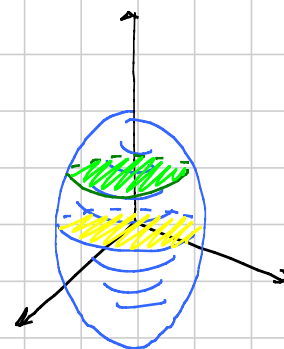
Descrizione diretta di A in coord. cilindriche
 $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 3]$, $0 \leq \rho \leq \sqrt{z}$

Esempio 3 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^4 \leq 9\}$ $\iiint_A z \, dx \, dy \, dz$

A si capisce bene per sezioni. È evidente che $-\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{3}$.
 Fissato z , la sezione S_z è $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9 - z^4\}$
 cerchio di raggio $\sqrt{9 - z^4}$

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz \, z \, \text{Area}(S_z)$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} z (9 - z^4) \pi \, dz = 0 \quad \text{perché è dispari in } z$$



Uhm: bella scoperta! Potevo dire che veniva = 0 per simmetria sulla figura iniziale

$$\iiint_A |z| \, dx \, dy \, dz = 2 \underbrace{\int_0^{\sqrt{3}} dz \cdot z \cdot \text{Area}(S_z)}_{\text{metà alta}} = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} z (9 - z^4) \, dz = \text{si fa}$$

Si poteva fare anche per colonne, forse...

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 9}_{\text{base}}, \underbrace{-\sqrt[4]{9 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt[4]{9 - x^2 - y^2}}_{\text{colonna}}\}$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_A |z| \, dx \, dy \, dz &= 2 \iint_{\text{base}} dx \, dy \int_0^{\sqrt{\dots}} z \, dz \\
 &= \iint_{\text{base}} dx \, dy \sqrt{9-x^2-y^2} = \int_0^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{9-p^2} p \\
 &= 2\pi \left[- (9-p^2)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \frac{1}{2} \right]_{p=0}^{p=3} = \text{finire e controllare che venga = a prima :)} \\
 &\quad \text{VERIFICA}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_A |x| \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 dz \iint_{S_z} |x| \, dx \, dy \\
 &\quad \text{sezioni} \\
 &= \int_0^3 dz \int_0^{\sqrt{9-z^2}} dp \int_0^{2\pi} d\theta p |\cos\theta| \cdot p \\
 &\quad \text{scrittura in coord. cilindriche}
 \end{aligned}$$

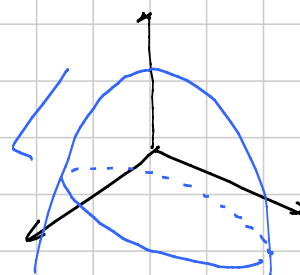
Per esercizio scrivere lo stesso per colonne (è probabile che alla fine la primitiva non sia elementare)

Esempio 4 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2-x^2-y^2 \geq z \geq 2x+2y\}$

$$\begin{aligned}
 \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz &= \text{volume di } z \quad \left(\int_a^b 1 \, dx = \text{lunghezza intervallo} \right) \\
 &\quad \left(\iint_A 1 \, dx \, dy = \text{Area}(A) \right)
 \end{aligned}$$

Come è fatto A ? La relazione data è la descrizione di una colonna

paraboloidi rovesc. $\geq z \geq$ piano



Manca di descrivere la base. Devo capire dove si intersecano i grafici

$$2 - x^2 - y^2 = 2x + 2y \leadsto x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 + 1 = 4$$

$$\underbrace{(x+1)^2 + (y+1)^2}_{\text{base}} \leq 4$$

$$\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz = \iint_{\text{base}} dx \, dy \int_{\underbrace{2x+2y}_{\text{lunghezza della colonna}}}^{2-x^2-y^2} 1 \, dz$$

$$= \iint_{\text{base}} (2 - x^2 - y^2 - 2x - 2y) \, dx \, dy \quad x+1=u \quad y+1=v$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (2 - (u-1)^2 - (v-1)^2 - 2(u-1) - 2(v-1)) \, du \, dv$$

$$\cancel{2} - u^2 + \cancel{2u} - \cancel{1} - v^2 + \cancel{2v} - \cancel{1} - \cancel{2u} + \cancel{2} - \cancel{2v} + \cancel{2}$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (4 - u^2 - v^2) \, du \, dv = \int_0^2 dp \int_0^{2\pi} d\theta (4 - p^2) p$$

$$= 2\pi \int_0^2 (4p - p^3) \, dp = \text{si fa}$$

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 33

[LOCK DOWN EDITION]

Note Title

08/04/2020

Integrali tripli in coordinate sferiche

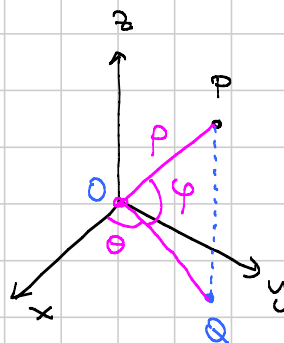
$$(p, \theta, \varphi) \quad p \geq 0 \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$x = p \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = p \cos \varphi \sin \theta$$

$$z = p \sin \varphi$$

} coordinate sferiche
dei geografi
 φ = latitudine
 θ = longitudine



Achtung! Le coordinate sferiche di fisici / ingegneri (anche i matematici si stanno adeguando) sono diverse, nel senso che

→ φ può essere diverso

→ talvolta φ e θ sono scambiati !

Usando le coord. dei geografi si ha

$$J = p^2 \cos \varphi$$

fisici si ha

$$J = p^2 \sin \varphi$$

Descrizione di insiemi in coord. sferiche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \quad 0 \leq p \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\} \quad 1 \leq p \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$A = \{(x, y, z) \in S, z \leq 0\} \quad 0 \leq p \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$$

semisfera "bassa" sotto piano xy

$$B = \{(x, y, z) \in S, z \geq 0, y \leq 0\} \quad 0 \leq p \leq 1, \pi \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Quanto di sfera

Esempio 1 $\iiint_S y \, dx \, dy \, dz = 0$ per simmetria

$$\iiint_S y \, dx \, dy \, dz = \iiint_A y \, dx \, dy \, dz$$

$$\begin{aligned} \iiint_B y \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \underbrace{\rho \cos\varphi \sin\theta}_y \underbrace{\rho^2 \cos\varphi}_J \\ &\quad \text{(da subito sappiamo che viene < 0)} \\ &= \underbrace{\int_0^1 \rho^3 \, d\rho}_{\frac{1}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta}_{-2} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, d\varphi}_{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Esempio 2 $\iiint_S |y| \, dx \, dy \, dz = \frac{\pi}{2}$ (è 4 volte il precedente cambiato di segno)

[Fare il conto esplicito per avere conferma]

Esempio 3 $\iiint_S |z| \, dx \, dy \, dz = 2 \iiint_{S_+} z \, dx \, dy \, dz = \frac{\pi}{2}$

dove $S_+ := \{(x, y, z) \in S : z \geq 0\}$ $\rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$
 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned} \iiint_{S_+} z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \underbrace{\rho \sin\varphi}_z \cdot \underbrace{\rho^2 \cos\varphi}_J \\ &= \underbrace{\int_0^1 \rho^3 \, d\rho}_{\frac{1}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cdot \cos\varphi \, d\varphi}_{\left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Oss. importante Era ovvio a priori che

$$\iiint_S |z| \, dx \, dy \, dz = \iiint_S |y| \, dx \, dy \, dz = \iiint_S |x| \, dx \, dy \, dz$$

sempre per ragioni di simmetria.

Esempio 4 $\iiint_S x^2 dx dy dz$

1° modo Conto completo in coord. così come sono

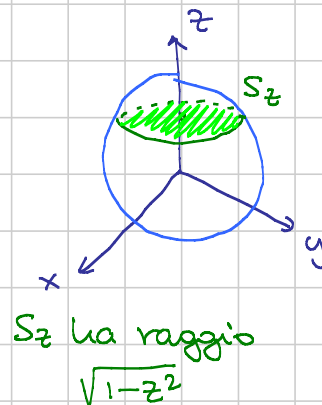
$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \underbrace{\frac{\rho^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta}{x^2}} \cdot \underbrace{\frac{\rho^2 \cos \varphi}{J}} \\
 &= \int_0^1 \underbrace{\rho^4 dp}_{\frac{1}{5}} \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2 \theta d\theta}_{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^3 \varphi d\varphi}_{\cos \varphi \cdot \cos^2 \varphi} = \frac{\pi}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi \\
 &= \frac{\pi}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi)}_{\cos \varphi - \sin^2 \varphi \cos \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{5} \left[+\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{2\pi}{5} \left[1 - \frac{1}{3} \right] = \boxed{\frac{4\pi}{15}}
 \end{aligned}$$

2° modo Usiamo la simmetria per integrare z^2 , che è più semplice ☺

$$\begin{aligned}
 \iiint_S x^2 dx dy dz &= \iiint_S z^2 dx dy dz = \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \underbrace{\frac{z^2}{\rho^2}} \underbrace{\frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{J}} \underbrace{\frac{\rho^2 \cos \varphi}{J}} \\
 &= \int_0^1 \underbrace{\rho^4 dp}_{\frac{1}{5}} \int_0^{2\pi} \underbrace{d\theta}_{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{2\pi}{5} \left[\frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4\pi}{15}}
 \end{aligned}$$

3° modo Integro z^2 per sezioni!

$$\begin{aligned}
 \iiint_S z^2 dx dy dz &= \int_{-1}^1 dz z^2 \iint_{S_z} dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 z^2 \text{Area}(S_z) = \pi \int_{-1}^1 z^2 (1 - z^2) dz = \boxed{\frac{4\pi}{15}} \\
 &= 2\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right]
 \end{aligned}$$



Esempio 5 $\iiint_A y^4 dx dy dz$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0\} = \text{mezza sfera}$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_S y^4 dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint_S z^4 dx dy dz$$

$\uparrow$ tutta la sfera di raggio 2 $\uparrow$ più comodo!

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\sigma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \rho^4 \sin^4 \varphi \cdot \rho^2 \cos \varphi$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^2 \rho^6 d\rho}_{\frac{2^7}{7}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\sigma}_{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \cdot \cos \varphi d\varphi = \frac{2^7}{7} \pi \left[\frac{1}{5} \sin^5 \varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{256}{35} \pi$$

2° modo: per sezioni

cerchio di raggio $\sqrt{4-z^2}$

$$\iiint_S z^4 dx dy dz = \int_{-2}^2 dz \cdot z^4 \cdot \text{Area}(S_z) = \pi \int_{-2}^2 z^4 (4-z^2) dz$$

$$= 2\pi \int_0^2 (4z^4 - z^6) dz = 2\pi \left[\frac{4}{5} z^5 - \frac{1}{7} z^7 \right]_0^2 = 2\pi \cdot 2^7 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = 2\pi \cdot 2^7 \frac{2}{35}$$

3° modo: per colonne!

$\sqrt{4-x^2-y^2}$

$$\iiint_S z^4 dx dy dz = \iint_{\text{Base}} dx dy \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^4 dz$$

$$= \frac{2}{5} \iint_{\text{Base}} dx dy \left[\sqrt{4-x^2-y^2} \right]^5 = \frac{2}{5} \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\sigma (4-\rho^2)^{5/2} \cdot \rho$$

$$= \frac{4\pi}{5} \int_0^2 \rho (4-\rho^2)^{5/2} d\rho = \left[\frac{4\pi}{5} \cdot \frac{2}{7} (4-\rho^2)^{7/2} \left(-\frac{1}{2} \right) \right]_{\rho=0}^{\rho=2}$$

$$= \frac{4\pi}{35} 4^{\frac{7}{2}} = \frac{4\pi}{35} \cdot 2^7 = \frac{\pi \cdot 2^9}{35}$$

Quando divido per 2 ritrovo la risposta del 1° modo.

4° modo Provare ad integrare direttamente x^4 in coord. sferiche !!!

— o — o —

ANALISI 2

-

LEZIONE 34

[LOCK DOWN EDITION]

Note Title

08/04/2020

Integrali tripli con cambi di variabile

Esempio 1 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(x+2)}_u^2 + \underbrace{(y-3)}_v^2 + \underbrace{(z+1)}_w^2 \leq 4\}$

$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iiint_{\text{nuovo } A} (u-2) \, du \, dv \, dw = -2 \text{ Volume (sfera)}$$

$u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$ $\downarrow$ per simmetria

$$= -2 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 8 = -\frac{64}{3} \pi$$

Non abbiamo pagato (cioè $J=1$) perché il cambio di variabili è una traslazione

Oss. Il volume della sfera è l'integrale di 1 sulla sfera stessa

$$\begin{aligned} \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, \rho^2 \cos \varphi \\ &= \underbrace{\int_0^R \rho^3 \, d\rho}_{\frac{R^3}{3}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi}_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

Esempio 2 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 + 5z^2 \leq 6\}$

$$\underbrace{(\sqrt{2}x)}_u^2 + \underbrace{(\sqrt{3}y)}_v^2 + \underbrace{(\sqrt{5}z)}_w^2 \leq 6$$

$$\iiint_A |x| \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 6} \frac{|u|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \, du \, dv \, dw = \frac{1}{\sqrt{60}} \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 6} |u| \, du \, dv \, dw$$

Devo calcolare J seguendo la procedura

① Ricavare: $x = \frac{u}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{v}{\sqrt{3}} \quad z = \frac{w}{\sqrt{5}}$

② Matrice jacobiana $\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

③ $J = |\text{Det}| = \frac{1}{\sqrt{30}}$

Calcolo dell'integrale

$$\iiint_{\dots} |u| du dv dw = \iiint_{\dots} |w| du dv dw$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{6}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} dp \quad p \sin \varphi \cdot p^2 \cos \varphi$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{6}} p^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$= 2 \cdot \frac{36}{4} \cdot 2\pi \left[\frac{1}{2} \sin \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 18\pi$$

Esempio 3 $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 + 4z^4 \leq 5 \}$

$$\underbrace{(\sqrt{2}x)^2}_{u^2} + \underbrace{(\sqrt{3}y)^2}_{v^2} + \underbrace{(\sqrt{2}z)^4}_{w^4} \leq 5$$

$$\iiint_A (x^2 y^2) dx dy dz$$

$$= \iiint_{u^2+v^2+w^4 \leq 5} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{3} \right) \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{3}}}_{\uparrow J} du dv dw$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{5}{6} \iiint_{u^2+v^2+w^4 \leq 6} u^2 du dv dw$$

↑
simmetria rispetto a u e v

(e' insieme resta lo stesso se scambio u e v)

L'integrale finale si fa per sezioni

$$\int_{-\sqrt[4]{6}}^{\sqrt[4]{6}} dw \iint_{S_w} u^2 du dv = \int_{-\sqrt[4]{6}}^{\sqrt[4]{6}} dw \int_0^{\sqrt{6-w^4}} dp \int_0^{2\pi} p^2 \cos^2 \theta \cdot p d\theta$$

↑
sezioni $u^2 + v^2 \leq 6 - w^4$

$$= \int_{-\sqrt[4]{6}}^{\sqrt[4]{6}} dw \int_0^{\sqrt{6-w^4}} p^3 dp \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_{\pi} = \frac{\pi}{4} \int_{-\sqrt[4]{6}}^{\sqrt[4]{6}} (6-w^4)^2 dw$$

= si fa.

Altro modo: provare a farlo per colonne !!!

Esempio 4 $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^4 \leq 1 \}$

$$\iiint_A z^2 dx dy dz$$

1° modo: per sezioni $= \int_{-1}^1 dz z^2 \text{Area}(S_z) = \pi \int_{-1}^1 z^2 (1-z^4) dz$

↑
 $x^2 + y^2 \leq 1 - z^4$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) = \frac{8}{21} \pi$$

2° modo: per colonne $= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_{-\sqrt[4]{1-x^2-y^2}}^{\sqrt[4]{1-x^2-y^2}} z^2 dz$

$$= \frac{2}{3} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy (1-x^2-y^2)^{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta (1-p^2)^{\frac{3}{4}} p$$

$$\left[\frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{7} (1-p^2)^{\frac{7}{4}} \left(-\frac{1}{2} \right) \right]_{p=0}^{p=1} = \frac{8}{21} \pi \quad \text{😊}$$

3° modo Cambro di variabili creativo

$$x^2 + y^2 + (z^2)^2 \leq 1$$

$x = u \quad y = v \quad z^2 = w$

$$= 2 \iiint_{\substack{u^2+v^2+w^2 \leq 1 \\ w \geq 0}} w \cdot \frac{1}{2\sqrt{w}} du dv dw$$

Vediamo il calcolo di J ① Ricavare: $x=u$, $y=v$, $z=\sqrt{w}$

② Matrice jacobiana
$$\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{w}} \end{pmatrix}$$

$$= \iiint_{\substack{u^2+v^2+w^2 \leq 1 \\ w \geq 0}} \sqrt{w} du dv dw = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{\rho \sin \varphi} \cdot \rho^2 \cos \varphi d\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \rho^{\frac{5}{2}} d\rho}_{\frac{2}{7}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin \varphi} \cdot \cos \varphi d\varphi = \frac{4\pi}{7} \left[\frac{2}{3} (\sin \varphi)^{\frac{3}{2}} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{7} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{8\pi}{21}} \text{ 😊}$$

Esempio 5 $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2y^2+z^2+xy+yz+zx \leq 18\}$

$$\iiint_A y^2 dx dy dz \quad \begin{aligned} 2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz+2zx &\leq 36 \\ (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 &\leq 36 \\ \underbrace{\quad}_u \quad \underbrace{\quad}_v \quad \underbrace{\quad}_w \end{aligned}$$

$$= \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 36} \left(\frac{u+v-w}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} du dv dw$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{u+v-w}{2} \\ y &= \frac{u+v-w}{2} \\ z &= \frac{-u+v+w}{2} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = \frac{1}{8} (1-1+1+1+1) = \frac{1}{2}$$

[Jacobiano corretto dopo video]

$$= \frac{1}{8} \iiint_{\dots} (u+v-w)^2 du dv dw$$

$$= \frac{1}{8} \iiint_{\dots} (u^2 + v^2 + w^2 + \underbrace{2uv}_{0} - \underbrace{2uw}_{0} - \underbrace{2vw}_{0}) du dv dw$$

per simmetria

$$= \frac{1}{16} \int_0^6 dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, p^2 \cdot p^2 \cos\varphi = \text{si fa facile :}$$

Esempio 6 $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z+y)^2 \leq 4, y \geq 0 \}$

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz$$

$$x = u$$

$$y = v$$

$$(z+y) = w$$

Che cosa diventa A ? $\{ u^2 + v^2 + w^2 \leq 4, v \geq 0 \} = A_{new}$

$$= \iiint_{A_{new}} \underbrace{(w-v)}_0 = - \int_0^2 dp \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p \cos\varphi \sin\theta \, p^2 \cos\varphi \, d\varphi$$

per simmetria

$$\begin{array}{l} x = u \\ y = v \\ z = w - v \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \leadsto \quad J = 1$$

$$= - \underbrace{\int_0^2 p^3 dp}_4 \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta}_2 \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi}_{\frac{\pi}{2}} = -4\pi$$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 35

[Lock down Edition]

Note Title

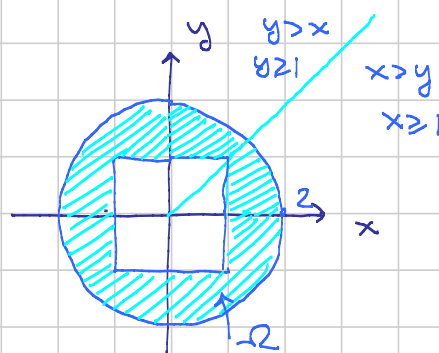
09/04/2020

Esempio 1 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|\} \geq 1, |z| \leq 1, x^2 + y^2 \leq 4\}$

$$\iiint_A |z + z^3| dx dy dz$$

Come è fatto A ? È una specie di "cilindro" con altezza $|z| \leq 1$ e base descritta da $x^2 + y^2 \leq 4$, $\max\{|x|, |y|\} \geq 1$

Osserviamo che la base è simm. rispetto agli assi, quindi basta capire il 1° quadrante



$$\iiint_A |z + z^3| \dots = 2 \iiint_{A^+} z + z^3 dx dy dz$$

$\uparrow$
 $z > 0 \Leftrightarrow z > 0$
 $z(1+z^2)$

$\uparrow$
 p.ti di A con $z > 0$

$$= 2 \int_0^1 dz (z + z^3) \iint_{S_z} 1 dx dy = 2 \int_0^1 (z + z^3) \text{Area}(R) dz$$

$\uparrow$
 S_z
 $\uparrow$
 R

$\uparrow$
 $4\pi - 4$

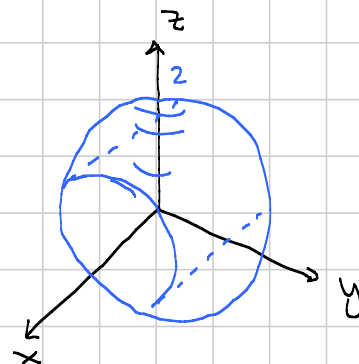
$$= 8(\pi - 1) \int_0^1 z + z^3 = \text{si fa.}$$

Si poteva fare per colonne con la stessa difficoltà.

Esempio 2 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4}_{\text{Dentro la sfera}}, \underbrace{y^2 + z^2 \geq 1}_{\text{fuori dal cilindro}}\}$

$$\iiint_A z^2 dx dy dz$$

Moralmente: stiamo facendo un buco nella sfera.



1° modo Per sezioni lungo l'asse x . Dove varia x ?

$$x^2 \leq 4 - y^2 - z^2 \leq 4 - 1 = 3 \rightsquigarrow x^2 \leq 3 \rightsquigarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

Fissato x , dove variano y e z ?

$$1 \leq y^2 + z^2 \leq 4 - x^2$$

$$\iiint_A z^2 dx dy dz = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \iint_{S_x} z^2 dy dz$$

$$\begin{aligned} y &= \rho \cos \theta \\ z &= \rho \sin \theta \end{aligned}$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_1^{\sqrt{4-x^2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\rho^2 \sin^2 \theta}_z \cdot \rho$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \underbrace{\int_1^{\sqrt{4-x^2}} \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4}[(4-x^2)^2 - 1]} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{\pi} = \frac{\pi}{4} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \{(4-x^2)^2 - 1\} dx$$

$$= \text{si fa}$$

2° modo Per colonne con base nel piano yz .

Quando mettiamo $x=0$ troviamo $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$

$\uparrow$ cilindro $\uparrow$ sfera

Fissati $(y, z) \in \text{Base}$, dove varia x ? $x^2 \leq 4 - y^2 - z^2 \rightsquigarrow -\sqrt{4-y^2-z^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2-z^2}$

$$\iiint_A z^2 dx dy dz = \iint_{\text{Base}} dy dz \cdot z^2 \int_{-\sqrt{4-y^2-z^2}}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} dx$$

$$= 2 \iint_{\text{Base}} dy dz \cdot z^2 \sqrt{4-y^2-z^2} = 2 \int_1^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho^2 \sin^2 \theta \sqrt{4-\rho^2} \cdot \rho$$

$$= 2 \int_1^2 \rho^3 \sqrt{4-\rho^2} d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{\pi} = 2\pi \int_1^2 \rho^3 \sqrt{4-\rho^2} d\rho$$

$$\text{Pongo } 4-\rho^2 = w \rightsquigarrow -2\rho d\rho = dw = \pi \int_0^3 (4-w) \sqrt{w} dw$$

$$= \text{si fa}$$

3° modo Si può impostare per differenza

$$\iiint_A z^2 \dots = \iiint_{\text{sfera}} z^2 - \iiint_{\text{Buco}} z^2$$

$\uparrow$ $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ $\uparrow$ $x^2+y^2+z^2 \leq 4$
 $\uparrow$ $y^2+z^2 \leq 1$
 $\uparrow$ ☺

$$\iiint_{\text{Buco}} z^2 dx dy dz = \iint_{y^2+z^2 \leq 1} z^2 dy dz \int_{-\sqrt{4-y^2-z^2}}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} dx = \text{più o meno come prima.}$$

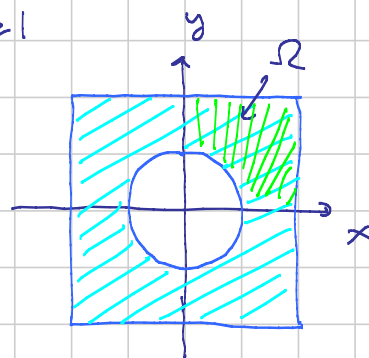
Esempio 4 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 2, |y| \leq 2, |z| \leq 2, x^2 + y^2 \geq 1\}$

$$\iiint_A |x| dx dy dz$$

A è una specie di cilindro con altezza $|z| \leq 2$ e base descritta da $|x| \leq 2, |y| \leq 2, x^2 + y^2 \geq 1$

$$= \iint_{\text{Base}} |x| dx dy \int_{-2}^2 1 dz$$

$$= 4 \iint_{\text{Base}} |x| dx dy = 16 \iint_{\text{Base} \cap \text{1° quadr.}} x dx dy$$



$$= 16 \left\{ \iint_{\text{Quadr.}} x dx dy - \iint_{\text{Settore circ.}} x dx dy \right\}$$

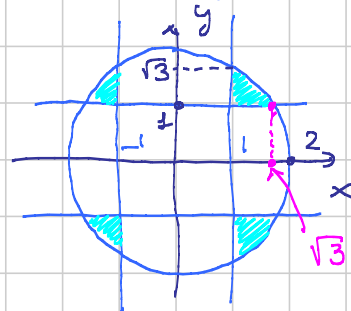
$$= 16 \left\{ \int_0^2 x dx \int_0^2 dy - \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \rho \cos \theta \cdot \rho \right\}$$

$$= 16 \left\{ 2 \int_0^2 x dx - \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \right\} = 16 \left\{ 4 - \frac{1}{3} \right\}.$$

Esempio 5 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \geq 1, |y| \geq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
 Dentro la sfera

$$\iiint_A |x| \, dx \, dy \, dz$$

$$\stackrel{\text{colonne}}{=} \iint_{\text{Base}} |x| \, dx \, dy \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 \, dz$$



$$= 2 \iint_{\text{Base}} |x| \sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$= 8 \int_1^{\sqrt{3}} dx \int_1^{\sqrt{4-x^2}} x \sqrt{4-x^2-y^2} \, dy \quad \dots \text{ forse era meglio normale asse } y$$

$$= 8 \int_1^{\sqrt{3}} dy \int_1^{\sqrt{4-y^2}} x \sqrt{4-x^2-y^2} \, dx$$

$$= 8 \int_1^{\sqrt{3}} dy \left[\frac{2}{3} (4-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_{x=1}^{x=\sqrt{4-y^2}}$$

$$= \frac{1}{24} \int_1^{\sqrt{3}} dy (3-y^2)^{\frac{3}{2}} = \text{si fa con la sostituzione } y = \sqrt{3} \sin w \quad dy = \sqrt{3} \cos w$$

= ci si riduce a integrare $\cos^4 w$.

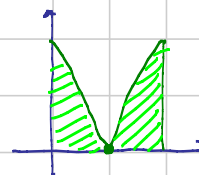
Esempio 6 $A = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \quad \iiint_A |2x-1| \, dx \, dy \, dz$

Andiamo per sezioni lungo asse x

$$= \int_0^1 dx |2x-1| \iint_{S_x} 1 \, dy \, dz = \int_0^1 |2x-1| \text{Area}(S_x) \, dx$$

↑
quadrato

$$= \int_0^1 |2x-1| \, dx = \frac{1}{2} \quad (\text{verificare spezzando il valore assoluto!})$$



ANALISI 2

LEZIONE 36

[Lock down Edition]

Note Title

09/04/2020

Esempio 1 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - y \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$

$$\iint_A x \, dx \, dy$$

$$\iint_A y \, dx \, dy$$

↓

0 per simmetria (integrandi DISPARI e se cambio x con $-x$ l'insieme resta lo stesso)

Idea: cercare di capire A in coord. polari

$$\rho^2 - \rho \sin \theta \leq \rho$$

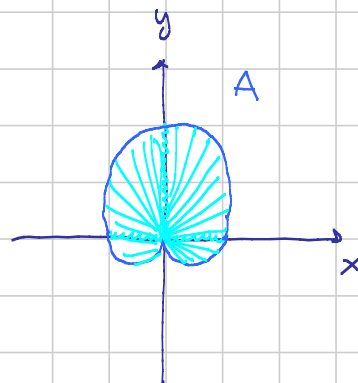
Posso semplificare ρ essendo > 0 tranne nell'origine

$$\rho - \sin \theta \leq 1 \quad \leadsto \quad \rho \leq 1 + \sin \theta$$

Quindi A si descrive come

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$0 \leq \rho \leq 1 + \sin \theta$$



quindi A è "normale rispetto a θ "

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1+\sin \theta} \rho \, d\rho \underbrace{\frac{\rho \sin \theta}{\rho}}_y \underbrace{\rho}_{J}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{1+\sin \theta} \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin \theta (1 + \sin \theta)^3 \, d\theta = \text{si fa.}$$

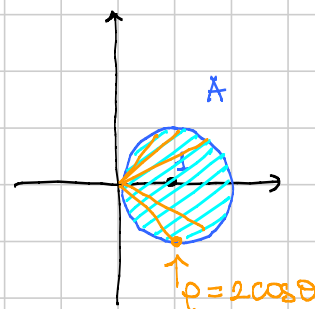
Esempio 2 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

$$x - 2x + 1 + y^2 \leq 1$$

$$\underbrace{(x-1)^2}_{u} + \underbrace{y^2}_{v} \leq 0$$

$$\iint_A (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} [(u+1)^2 + v^2] \, du \, dv$$

= tranquillissimo



$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

1° modo Normale asse x

$$= \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, dy \quad \text{e ora devo fare la primitiva} \quad \text{☹}$$

2° modo Cambio variabili come prima

$$\iint_{u^2+v^2 \leq 1} \sqrt{(u+1)^2+v^2} \, du \, dv = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \sqrt{u^2+v^2+2u+1} \, du \, dv$$

e anche andando in coord. polari è un disastro ☹

3° modo Osserviamo che la funzione è molto bella in coord. polari $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$
L'insieme è "meno bello", ma forse non malissimo

$$x^2+y^2-2x \leq 0 \leadsto \rho^2-2\rho \cos \theta \leq 0 \leadsto \rho \leq 2 \cos \theta$$

Quindi l'insieme è normale risp. a θ

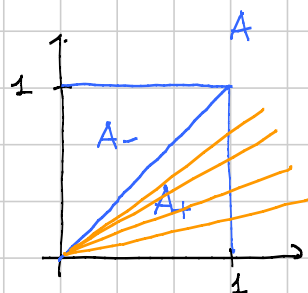
questo ha senso
e $\cos \theta \geq 0$, cioè
 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho \, d\rho \, \rho$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8 \cos^3 \theta \, d\theta = \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (1-\sin^2 \theta) \, d\theta \quad \text{ed è fatta}$$

Esempio 3 $A = [0,1] \times [0,1]$

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy$$



In coord. cartesiane devo fare la primitiva di $\sqrt{x^2+y^2}$, che si fa (provare!) ma non è piacevole.

Alternativa: provare a descrivere il quadrato in coord. polari !!

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2} dx dy = 2 \iint_{A_+} \sqrt{x^2+y^2} dx dy \quad (\text{se scambio } x \text{ con } y \text{ non cambia nulla})$$

In A_+ abbiamo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Dove varia ρ ?

$$x \leq 1 \leadsto \rho \cos \theta \leq 1 \leadsto \rho \leq \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\iint_{A_+} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} d\rho \rho \cdot \rho = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta$$

C'è un trucco per le potenze dispari di sin e cos

$$\int \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{(1-\sin^2 \theta)^2} d\theta$$

$$t = \sin \theta \Rightarrow \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \text{si fa.}$$

Esempio 4 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$

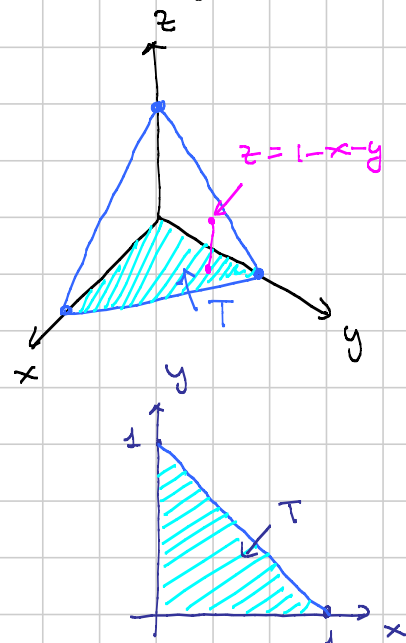
$$\iiint_A x dx dy dz$$

1° modo Per colonne

$$= \iint_T x dx dy \int_0^{1-x-y} dz$$

$$= \iint_T x(1-x-y) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy x(1-x-y) = \text{si fa}$$



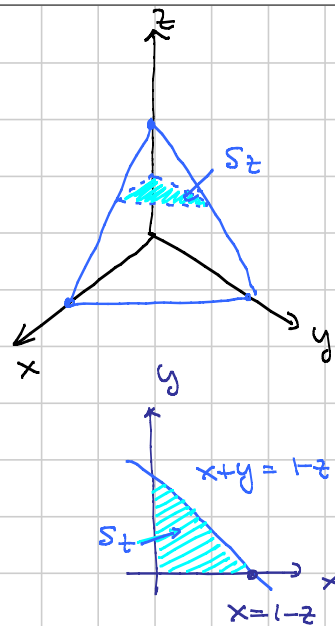
2° modo Per sezioni lungo asse z

$$= \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx dy \quad x$$

Come descrivo S_z ? $x \geq 0, y \geq 0$
 $x+y \leq 1-z$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \times \int_0^{1-z-x} dy$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} x(1-z-x) dx = \text{si fa e dovrebbe coincidere}$$



3° modo Sezioni lungo asse x , oppure sezioni lungo asse z ma dopo aver osservato che $\iiint x = \iiint z$ per simmetria

$$\iiint_{\text{tetra}} x dx dy dz = \iiint_{\text{tetra}} z dx dy dz = \int_0^1 z dz \text{Area}(S_z) = \frac{1}{2} (1-z)^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 z (1-z)^2 dz = \text{si fa banalmente}$$

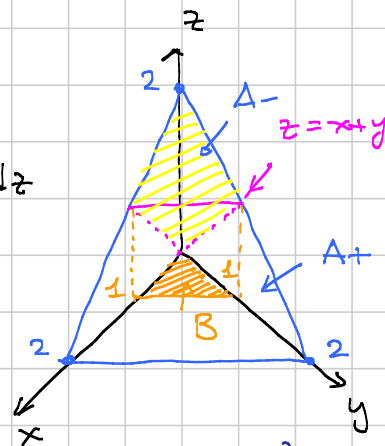
Esempio B $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 2\}$

$$\iiint_A |x+y-z| dx dy dz$$

$$= \iiint_{A^+} (x+y-z) dx dy dz - \iiint_{A^-} (x+y-z) dx dy dz$$

A_- si scrive bene, A_+ è fatto da tantissimi pezzi

$$A_- = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y \leq z \leq 2-x-y, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$$



Dovendo valere $x+y \leq 2-x-y$, allora di sicuro $x+y \leq 1$

$$\text{Osservo che } \iiint_A (x+y-z) \dots = \iiint_{A^+} (x+y-z) \dots + \iiint_{A^-} (x+y-z) \dots$$

$$\text{e quindi } \iiint_{A^+} (x+y-z) \dots = \iiint_A (x+y-z) \dots - \iiint_{A^-} (x+y-z) \dots$$

e in conclusione

$$\iiint_A |x+y-z| dx dy dz = \iiint_A (x+y-z) dx dy dz - 2 \iiint_{A^-} (x+y-z)$$

Questi si scrivono per colonne

$$\iiint_A \dots = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} dz \dots$$

$$\iiint_{A^-} \dots = \underbrace{\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy}_{\text{Base B}} \int_{x+y}^{2-x-y} dz \dots$$

e questi si fanno !!!

Metodo alternativo : provare con un cambio di variabili
oppure provare a scrivere A_+ spezzandolo
in un numero sufficiente di parti
— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 37

LOCK DOWN EDITION

Note Title

18/04/2020

Esempio 1 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$

$$\iiint_A |x+y-z| dx dy dz$$

Cambio di variabili : $x = u$

$$z = v$$

$$x+y=w \leadsto y = w-u$$

Le 4 condizioni diventano

$$x \geq 0 \leadsto u \geq 0$$

$$y \geq 0 \leadsto w-u \geq 0, w \geq u$$

$$z \geq 0 \leadsto v \geq 0$$

$$x+y+z \leq 1 \leadsto w+v \leq 1$$

$$0 \leq u \leq w$$

descrizione di colonna
(N.B. L'integranda non dipende da u)

$$= \iint_{\text{Base}} dv dw \int_0^w du |w-v| = \iint_{\text{Base}} |w-v| w dv dw$$

Chi è la base? La base è data da $v \geq 0, w+v \leq 1, w \geq 0$

$$= \iint_T w |w-v| dv dw = \text{questo di sopra spezzando}$$



$$= \iint_{T^+} w(w-v) dv dw + \iint_{T^-} w(v-w) dv dw = \text{si calcolano.}$$

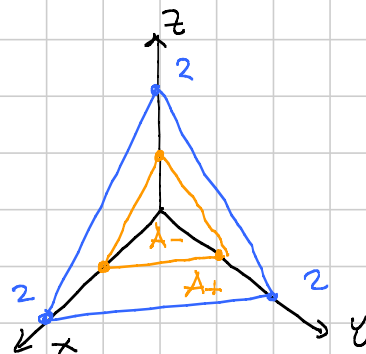
$\uparrow$ normale asse x $\uparrow$ normale asse y

[Controllare che venga uguale a quello dell'altra volta]
[Osservare che $y=1$]

Esempio 2 A dato dalle relazioni

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 2$$

$$\iiint_A |x+y+z-1| dx dy dz$$



1° modo Scompongo con A_+ e A_-

$$\underbrace{\iiint_A (x+y+z-1)}_{\text{si fa facile}} = \iiint_{A_+} (x+y+z-1) + \iiint_{A_-} (x+y+z-1)$$

$$\Rightarrow \iiint_{A_+} (x+y+z-1) = \iiint_A - \iiint_{A_-}$$

$$\begin{aligned} \iiint_A |x+y+z-1| dx dy dz &= \iiint_{A_+} (x+y+z-1) \dots - \iiint_{A_-} (x+y+z-1) \\ &= \iiint_A (x+y+z-1) - 2 \iiint_{A_-} (x+y+z-1) \end{aligned}$$

= si fanno entrambi come insieme normali cioè per colonne. Ad esempio

$$\iiint_A (x+y+z-1) = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} (x+y+z-1) dz = \text{solo conti.}$$

2° modo Se volessi davvero calcolare l'integrale su A_- direttamente, senza scriverlo per differenza, dovrei fare

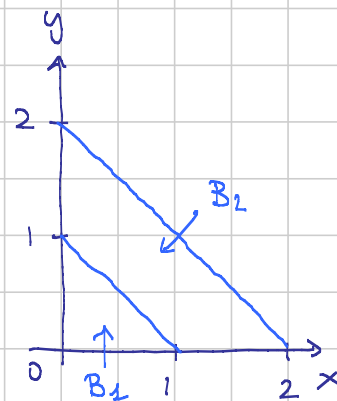
$$\begin{aligned} \iiint_{A_-} \dots &= \iint_{B_1} dx dy \int_{1-x-y}^{2-x-y} dz \dots \\ &+ \iint_{B_2} dx dy \int_0^{2-x-y} dz \dots \end{aligned}$$

Ora

$$\iint_{B_1} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \dots$$

$$\iint_{B_2} dx dy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} dy \dots + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy \dots$$

sono conti più lunghi, ma fattibili.



3° modo

Cambio di variabili

$x = u$

$y = v$

$x+y+z = w$

$z = w - u - v$

$x \geq 0$

 $\leadsto$

$u \geq 0$

$y \geq 0$

 $\leadsto$

$v \geq 0$

$z \geq 0$

 $\leadsto$

$w - u - v \geq 0$

$x+y+z \leq 2$

 $\leadsto$

$w \leq 2$

$u+v \leq w$

Descrizione della
sezione a w
fisso!!

Quindi procedendo per sezioni

$$\iiint_A |x+y+z-1| dx dy dz = \int_0^2 dw \iint_{S_w} dw du \quad (|w-1|)$$

$$= \int_0^2 dw |w-1| \text{Area}(S_w)$$

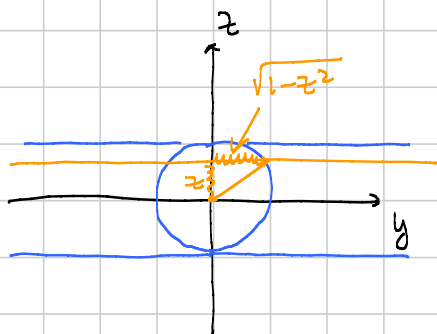
$$= \frac{1}{2} \int_0^2 w^2 |w-1| dw = \text{si fa facile.}$$



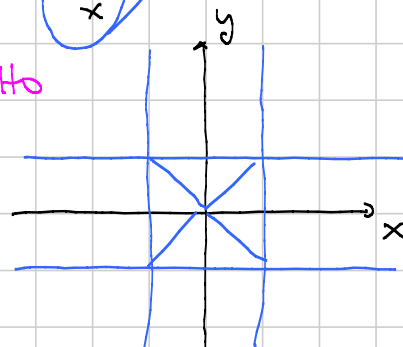
[Controllare che i vari procedimenti d'auto lo stesso risultato].

Esempio 3 Intersezione di 2 cilindri con raggio uguale e assi perpendicolari.

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \leq 1, x^2+z^2 \leq 1\}$$



Dall'alto



Devo calcolare $\text{Vol}(A) = \iint_A 1 \, dx \, dy \, dz$

1° modo Per sezioni lungo asse z

$$\text{Vol} = \int_{-1}^1 dz \iint_{S_z} dx \, dy = \int_{-1}^1 \text{Area}(S_z) \, dz$$

Chi è S_z ? Fissato z , le equazioni diventano

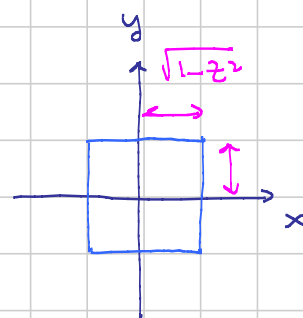
$$x^2 \leq 1 - z^2$$

$$y^2 \leq 1 - z^2$$

$$|x| \leq \sqrt{1 - z^2}$$

$$|y| \leq \sqrt{1 - z^2}$$

Quadrato!



(Coerente con l'oss. geometrica che tagliando i cilindri con un piano ad altezza z ottengo strisce di semiampiezza $\sqrt{1-z^2}$)

$$\text{Vol} = 4 \int_{-1}^1 (1 - z^2) \, dz = \text{si fa}$$

2° modo Per colonne

Base: quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Fissati $(x, y) \in \text{Base}$, dove varia z ?

$$z^2 \leq 1 - x^2$$

$$z^2 \leq 1 - y^2$$

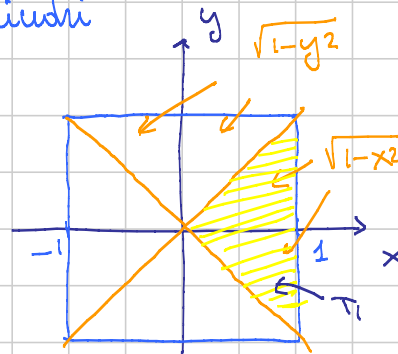
$$\leadsto |z| \leq \min \{ \sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - y^2} \}$$

equazioni dei due cilindri

$$\text{Vol} = 4 \iint_{T_1} dx \, dy \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz$$

$$= 8 \iint_{T_1} dx \, dy \sqrt{1 - x^2}$$

$$= 16 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \sqrt{1 - x^2}$$



$$= 16 \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = 16 \left[\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_{x=0}^{x=1}$$

= si fa

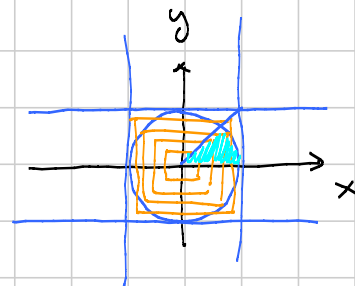
— 0 — 0 —

Esempio 4 Aggiungiamo il 3° cilindro ☺

$$x^2 + z^2 \leq 1$$

$$y^2 + z^2 \leq 1$$

$$x^2 + y^2 \leq 1$$



[Cercare di farsi un'idea di cosa viene fuori]

[Cercare di capire perché viene male per sezioni: si tratterebbe di intersecare i vecchi quadrati con il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$]

Quello che si salva è il metodo per colonne

$$\text{Vol} = 16 \iint_{\text{setto}} \sqrt{1-x^2} dx dy$$

$$= 16 \int_0^1 dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1-p^2 \cos^2 \theta} p$$

$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 dp p \sqrt{1-p^2 \cos^2 \theta}$$

$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[\frac{2}{3} (1-p^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2 \cos^2 \theta}\right) \right]_{p=0}^{p=1}$$

Fare verifica che sia primitiva!

$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[-\frac{1}{3} \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \sin^3 \theta + \frac{1}{3 \cos^2 \theta} \right]$$

e questo in qualche modo si fa

ANALISI 2

LOCK DOWN EDITION

LEZIONE 38

Note Title

18/04/2020

Calcolo di baricentri e momenti di inerzia

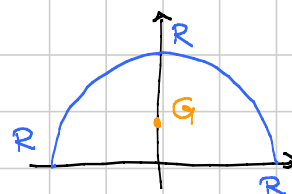
Requisiti: lez. 32-33-34 di AM2-14

Per figure piane: $G = (x_G, y_G)$

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}} \iint_{\text{Figura}} x \, dx \, dy$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}} \iint_A y \, dx \, dy$$

Per figure solide è uguale, solo con 3 componenti e dividendo per il volume.

Esempio 1 (Semicerchio) $x_G = 0$
(per simmetria)

$$\iint_{\text{Fig}} y \, dx \, dy = \int_0^R dp \int_0^\pi d\theta \, p \sin \theta \, p = 2 \frac{1}{3} R^3$$

$$y_G = \frac{2}{3} R^3 \frac{1}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4}{3\pi} R \quad (\text{un po' meno di metà, un non troppo meno})$$

Momento di inerzia rispetto ad un asse = integrale del quadrato della distanza dall'asse stesso.

Rispetto all'asse x

$$\begin{aligned} \iint_{\text{Fig}} y^2 \, dx \, dy &= \int_0^R dp \int_0^\pi d\theta \, p^2 \sin^2 \theta \, p \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{4} R^4 \end{aligned}$$

Rispetto all'asse y

$$\iint_{\text{Fig}} x^2 \, dx \, dy = \text{viene uguale.}$$

Esempio 2 (semisfera) $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$

(x_G, y_G, z_G)
 $\begin{matrix} \text{O} & \text{O} \\ \text{O} & \text{O} \end{matrix}$

$$z_G = \frac{1}{\text{Vol}} \iiint z \, dx \, dy \, dz$$

$$\text{Vol} = \frac{2}{3} \pi R^3$$

$$\iiint z \, dx \, dy \, dz = \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, \rho \sin \varphi \, \rho^2 \cos \varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^R \rho^3 \, d\rho}_{\frac{1}{4} R^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}_{\left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^{\pi/2}} = \frac{1}{4} R^4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{R^4}{4} \pi$$

$$z_G = \frac{R^4}{4} \cancel{\pi} \frac{3}{2\pi R^3} = \frac{3}{8} R \quad (\text{più basso rispetto al semicerchio})$$

Esempio 3 (Reto di paraboloide)

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \quad (x_G, y_G, z_G)$$

1

$$\text{Vol}(P) = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy \int_{x^2+y^2}^1 dz$$

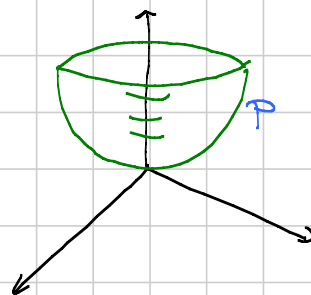
$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (1 - \rho^2) \rho$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\iiint_P z \, dx \, dy \, dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=x^2+y^2}^{z=1}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (1 - \rho^4) \rho = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \left[\frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{6} \rho^6 \right] = \frac{\pi}{3}$$

$$\leadsto z_G = \frac{2}{3} \quad (\text{ragionevole})$$

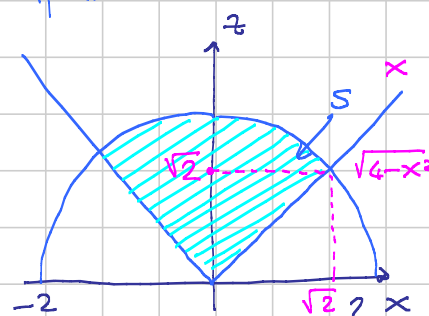


$$\text{Momento di inerzia rispetto all'asse } z = \iiint_P \underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{distanza da asse } z} dx dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy (x^2+y^2) \int_{x^2+y^2}^1 dz = \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p^2 (1-p^2) p = \text{si fa.}$$

Esempio 4 $\underbrace{x^2+y^2+z^2 \leq 4}_{\text{sfera}}, \underbrace{x^2+y^2 \leq z^2}_{\text{cono}}, \underbrace{z \geq 0}_{\text{parte alta}}$

Interseco: $\sqrt{4-x^2} = x$
 $4-x^2 = x^2 \leadsto x^2 = 2$
 $\leadsto x = \pm\sqrt{2}$



Volume per colonne

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 2} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} dp \int_0^{2\pi} d\theta (\sqrt{4-p^2} - p) p = \text{si fa}$$

Nota: integrare z in questo modo è ancora più comodo

Volume per sezioni

La sezione S_z è un cerchio di raggio

- z se $z \in [0, \sqrt{2}]$
- $\sqrt{4-z^2}$ se $z \in [\sqrt{2}, 2]$

Quindi

$$\text{Volume} = \int_0^{\sqrt{2}} dz \pi z^2 + \int_{\sqrt{2}}^2 dz \pi (4-z^2) dz = \text{si fa facile}$$

[Se volevo integrare z , bastava moltiplicare per z le due integrande]

Volume in coord. sferiche $\rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$$\text{Volume} = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos \varphi d\varphi = \text{si fa tranquillo}$$

[Se dovevo integrare z , dovevo integrare $\rho \sin \varphi \cdot \rho^2 \cos \varphi$]

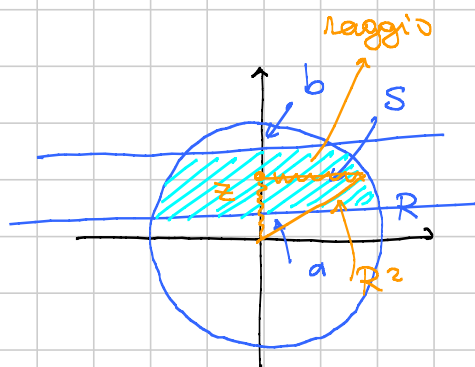
[Controllare che il risultato sta lo stesso nei 3 modi 😊]

Esempio 5 Segmento sferico in generale

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad a \leq z \leq b$$

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \int_a^b dz \text{Area}(S_z) \\ &\quad \uparrow \text{sezioni} \quad \uparrow \text{raggio } \sqrt{R^2 - z^2} \\ &= \pi \int_a^b (R^2 - z^2) dz = \text{si fa facile} \end{aligned}$$

$$\iiint_S z \, dx \, dy \, dz = \pi \int_a^b z (R^2 - z^2) dz = \text{si fa}$$



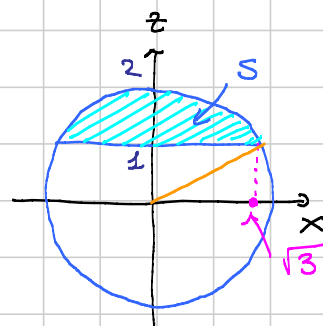
Esempio 6 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \quad z \geq 1$

Vogliamo momento di inerzia rispetto
asse z

$$\iiint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

1° modo: sezioni $= \int_1^2 dz \iint_{S_z} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ S_z ha raggio $\sqrt{4 - z^2}$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \, \rho^2 \cdot \rho = 2\pi \int_1^2 dz \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{4-z^2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^2 (4 - z^2)^2 dz = \text{😊} \end{aligned}$$



$$\boxed{2^{\circ} \text{ modo: colonne}} = \iint_{\text{Base}} dx dy (x^2 + y^2) \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz$$

$$= \iint_{\text{Base}} (x^2 + y^2) [\sqrt{4-x^2-y^2} - 1] dx dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho^2 (\sqrt{4-\rho^2} - 1) \rho = \text{si fa con un Epsilon di fatica } t = 4-\rho^2 \text{ e vai per sostituzione}$$

$\boxed{3^{\circ} \text{ modo: si può fare in sferiche?}}$

$$\theta \in [0, 2\pi] \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{Dove varia } \rho?$$

$$z \geq 1 \quad \rho \sin \varphi \geq 1 \quad \rho \geq \frac{1}{\sin \varphi} \quad \leadsto \quad \frac{1}{\sin \varphi} \leq \rho \leq 2$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sin \varphi}}^2 d\rho \underbrace{\frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{x^2 + y^2}}_{\frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{\rho^2 \sin^2 \varphi}} \underbrace{\rho \cos \varphi}_J$$

$$= 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi \int_{\frac{1}{\sin \varphi}}^2 \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \left(16 - \frac{1}{\sin^4 \varphi} \right) d\varphi = \text{si fa}$$

$$\int \cos^3 \varphi = \int \cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi \quad \sin \varphi = t \text{ e viene}$$

$$\int \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^4 \varphi} = \int \cos \varphi \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\sin^4 \varphi} d\varphi \quad \text{" "}$$

[Controllare che venga lo stesso nei 3 modi :)]

ANALISI 2

LOCK DOWN EDITION

LEZIONE 39

Note Title

19/04/2020

Curve $\rightarrow$ chiusura
semplicità
retta tangente
disegno

Prerequisiti : AM2-14 Lez 35

Curva: $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^d)$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

Chiusa $\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$ [Come verifico? Sostituisco gli estremi]

Retta tangente in un certo t_0 : $\gamma(t_0) + t \gamma'(t_0)$

retta che passa per $\gamma(t_0)$ e che ha direzione data da $\gamma'(t_0)$ se questo è $\neq 0$

Semplice $\Leftrightarrow$ iniettiva, tranne al più agli estremi, cioè se

$$\gamma(t) = \gamma(s) \Rightarrow t = s \text{ oppure } \{t, s\} = \{a, b\}$$

Come verifico la semplicità?

$\rightarrow$ spero che almeno una delle componenti sia monotona strett.

(questo fallisce di sicuro se la curva è chiusa)

$\rightarrow$ spero che esista un INVARIANTE MONOTONO, cioè una funzione $f(x, y)$ tale che $t \rightarrow f(x(t), y(t))$ sia monotona

$\rightarrow$ Imposto il sistema $\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$ e spero risolvendo di trovare $t = s$ oppure

$\rightarrow$ Ragiono "per zone" gli estremi

Esempio 1 $\gamma(t) = (t, t^2)$ $t \in [-2, 2]$

→ Chiusa? NO: $\gamma(-2) = (-2, 4)$ $\gamma(2) = (2, 4)$ DIVERSI

→ Retta tangente in $t=1$ Punto $\gamma(1) = (1, 1)$
 $\dot{\gamma}(t) = (1, 2t) \leadsto \dot{\gamma}(1) = (1, 2)$

Retta tangente $(1, 1) + t(1, 2) = (1+t, 1+2t)$

Volevo si passa in cartesiana

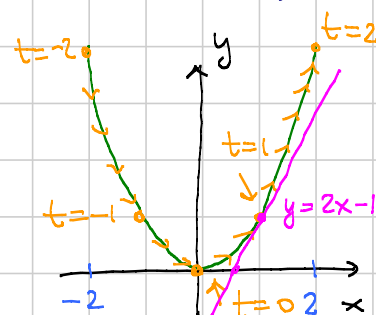
$$x = 1+t \leadsto t = x-1 \leadsto y = 1+2t = 1+2x-2 = 2x-1$$

$$\leadsto y = 2x-1$$

→ Semplice? SI: basta osservare che $x(t)$ è monotona per $t \in [-2, 2]$

La seconda componente non è monotona, ma non importa!

→ Disegno. È la parametrizzazione del grafico di $y = x^2$ con $x \in [-2, 2]$

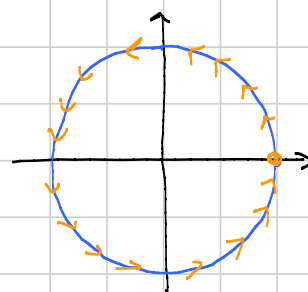


Nel disegno c'è il "sostegno" della curva

Esempio 2 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$

→ Chiusa: SI $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$
 ↑ [Cometto dopo video]

→ Semplice: SI, ma le componenti non sono monotone.



Semplicità dimostrata per zone : voglio mostrare che

$$\gamma: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

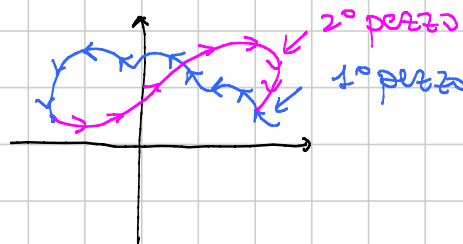
↑ escluso

è iniettiva. Divido l'intervallo in 2

→ per $t \in [0, \pi]$ la curva è iniettiva perché $\cos t$ è monotona in $[0, \pi]$

→ per $t \in (\pi, 2\pi)$ (ho escluso gli estremi) la curva è di nuovo iniettiva perché $\cos t$ è monotona pure in $(\pi, 2\pi)$ (ora è crescente, prima era decrescente)

Achtung! Non basta essere iniettive in $[0, \pi]$ e in $(\pi, 2\pi)$ per esserlo globalmente in $[0, 2\pi)$, cioè l'iniettività NON SI RINCOLLA. Potrebbero esistere $t_1 \in [0, \pi]$ e $t_2 \in (\pi, 2\pi)$ tali che $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$

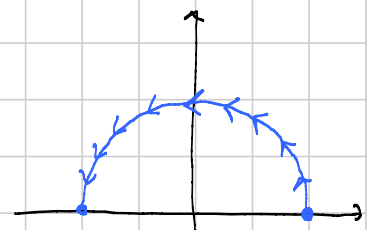


→ Nei due sottointervalli la curva sta in "zone diverse": infatti per $t \in [0, \pi]$ la curva ha $y(t) \geq 0$, mentre per $t \in (\pi, 2\pi)$ la curva ha $y(t) < 0$, quindi non sono possibili intersezioni.

Esempio 4 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 6\pi]$

La curva ha lo stesso sostegno di prima, ma lo percorre 3 volte, quindi NON è chiusa e NON è semplice.

Esempio 5 $\gamma(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$
 $t \in [-1, 1]$ ↑ prima componente monotona
 $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 1$



Esempio 6 $\gamma(t) = (\cos^3 t, 2 \sin t)$ $t \in [-\pi, \pi]$

→ Chiusa?

$$\gamma(-\pi) = (-1, 0)$$

Sì, è chiusa

$$\gamma(\pi) = (-1, 0)$$

→ Semplice?

Non c'è speranza di avere una componente monotona

Impostiamo il sistema:

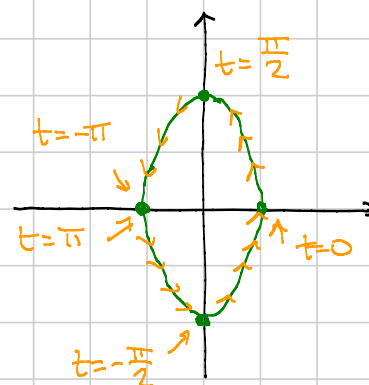
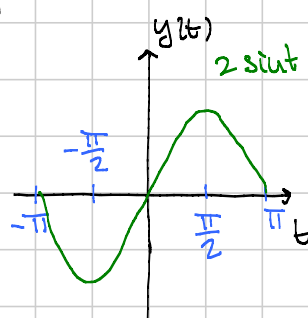
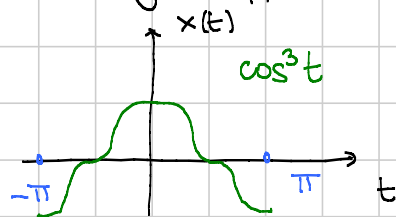
$$\begin{cases} \cos^3 t = \cos^3 s \\ 2 \sin t = 2 \sin s \end{cases} \quad \text{posso fare } \sqrt[3]{} \quad \begin{cases} \cos t = \cos s \\ \sin t = \sin s \end{cases}$$

Essendo t ed s in $[-\pi, \pi]$, quindi "nello stesso giro", l'unica possibilità è che sia $t = s$ oppure t ed s uguali ai 2 estremi.

Si poteva fare con le zone? Sì!

- per $t \in [-\pi, 0]$ si ha che $x(t) = \cos^3 t$ è monotona cresc. e $y(t) = 2 \sin t \leq 0$
- per $t \in (0, \pi)$ si ha che $x(t) = \cos^3 t$ è monotona decresc. e $y(t) = 2 \sin t > 0$
- i due rami non si intersecano perché stanno in semipiani diversi

→ Disegno approssimato



Esempio 7 $\gamma(t) = (e^t, 2\sin t)$ $t \in [-1, 1]$

→ chiusa? NO $\gamma(-1) = (\frac{1}{e}, 2\sin(-1))$

$\gamma(1) = (e, 2\sin 1)$

→ semplice? SI : entrambe le componenti sono monotone in $[-1, 1]$

→ Retta tangente in $t=0$

$\gamma(0) = (1, 0)$

$\dot{\gamma}(t) = (e^t, 2\cos t)$

$\dot{\gamma}(0) = (1, 2)$

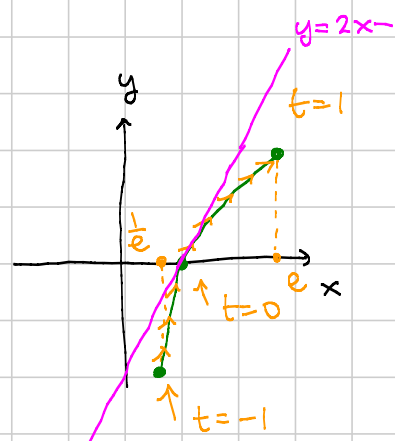
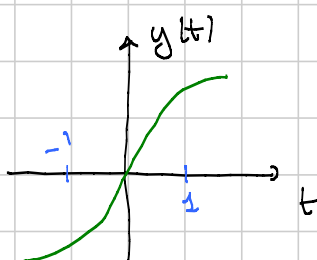
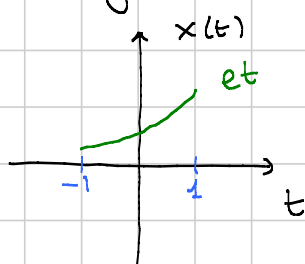
$(1, 0) + t(1, 2) = (1+t, 2t)$

$x = 1+t$ $t = x-1$

$y = 2t = 2x - 2$

$y = 2x - 1$

→ Disegno sommario



ANALISI 2 — LEZIONE 40

LOCK DOWN EDITION

Note Title

19/04/2020

Esempio 1 $\gamma(t) = (t \sin t, t \cos t)$ $t \in [-\pi, \pi]$

→ Chiusa? $\gamma(-\pi) = (0, \pi)$ $\gamma(\pi) = (0, -\pi)$ SI

→ Semplice? Osservazione: la prima componente è pari, la seconda è dispari

2^a oss. : $x(t)^2 + y(t)^2 = t^2$

Esempio 0 $\gamma(t) = (t \sin t, t \cos t)$ $t \in [0, 4\pi]$

→ Semplice? SI Considero la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$

$f(x(t), y(t)) = t^2 \leftarrow$ in $[0, 4\pi]$ è strett. cresc., quindi monotona

[Se ho $x(t) = x(s)$ e $y(t) = y(s)$, allora per forza

$$\begin{matrix} x(t)^2 + y(t)^2 & = & x(s)^2 + y(s)^2 \\ \text{" } t^2 & & s^2 \end{matrix}$$

e questo se t ed s sono in $[0, 4\pi]$ implica $t=s$]
 — o — o —

Lo stesso trucco non funziona subito nell'esempio 1, ma quasi!

Supponiamo $\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$

Allora $t^2 = s^2$, e in $[-\pi, \pi]$ questo vale se e solo se $t=s$ oppure $t=-s$. Nel primo caso siamo a posto.

Nel secondo caso avremmo

$$x(t) = x(-t)$$

$$t \sin t = (-t) \sin(-t) = t \sin t$$

$$y(t) = y(-t)$$

$$t \cos t = (-t) \cos(-t) = -t \cos t$$

$$\leadsto 2t \cos t = 0 \leadsto t = 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$s = 0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

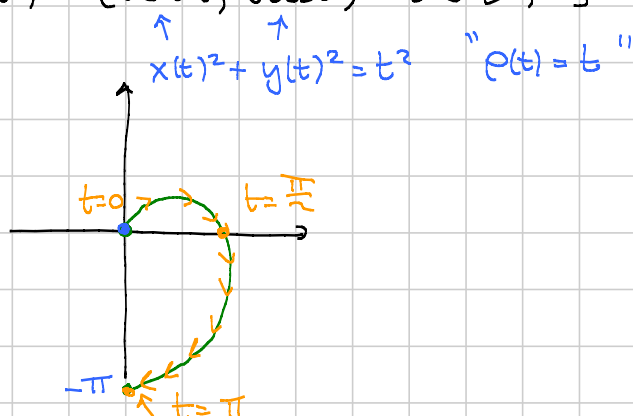
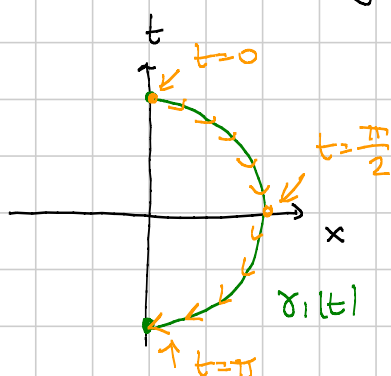
E quindi la curva non è semplice perché

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$\gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Abbiamo trovato 2 valori diversi di t per cui la curva sta nello stesso punto! Basta questa SOLA RIGA per dire che la curva NON è semplice!!

Esempio 0.5 Disegnare $\gamma_1(t) = (\sin t, \cos t) \quad t \in [0, \pi]$
 Disegnare $\gamma_2(t) = (t \sin t, t \cos t) \quad t \in [0, \pi]$



Esempio 2 $\gamma(t) = (2t+t^2, t+t^2) \quad t \in [-2, 2]$

→ Chiusa? $\gamma(-2) = (0, 2) \quad \gamma(2) = (8, 6) \quad \underline{\text{NO}}$

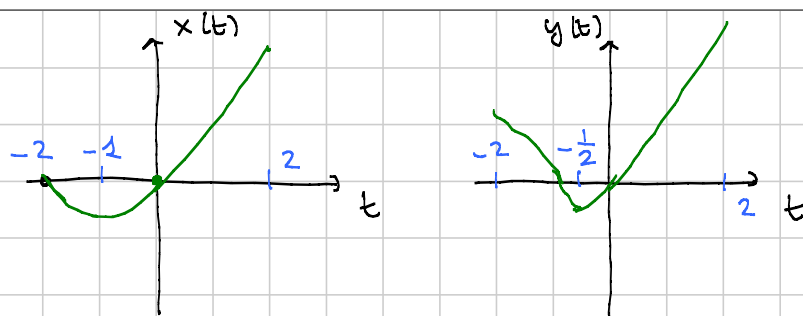
→ Semplice? Vediamo se ci sono componenti monotone

$$x(t) = 2t + t^2$$

$$x'(t) = 2 + 2t$$

$$y(t) = t + t^2$$

$$y'(t) = 1 + 2t$$



Nessuna componente è monotona in $[-2, 2]$ 😞

Imposto il sistema

$$\begin{cases} 2t+t^2 = 2s+s^2 \\ t+t^2 = s+s^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - s^2 = 2s - 2t \\ t^2 - s^2 = s - t \end{cases} \quad \begin{cases} (t+s)(t-s) = -2(t-s) \\ (t+s)(t-s) = -(t-s) \end{cases}$$

si potrebbe anche semplificare, perché il caso $t=s$ è quello che ci va bene

Raccogliamo che è più sicuro!

$$\begin{cases} (t-s)(t+s+2) = 0 \\ (t-s)(t+s+1) = 0 \end{cases}$$

1ª equ. $\nearrow t=s$ 😊

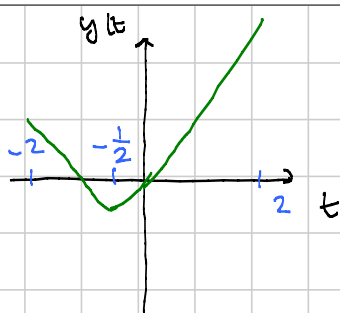
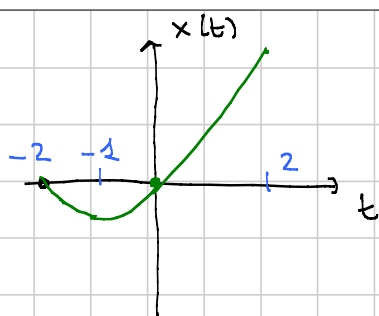
$\searrow t+s=-2 \rightarrow$ 2ª equ. $(t-s)(-1)=0 \rightarrow t=s$ 😊

L'unica possibilità è $t=s$, quindi la curva è semplice!

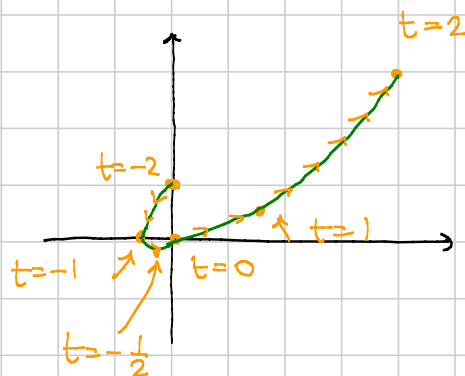
2º modo Si poteva fare con l'invariante! $x(t) = 2t+t^2$
 $y(t) = t+t^2$

Considero $f(x, y) = x - y$. Allora

$$f(2t+t^2, t+t^2) = t \text{ che è iniettiva} \quad 😊$$



Dalle componenti, deduciamo il disegno della curva



- Per $t \in [-2, -1]$ abbiamo $x(t)$ scende e $y(t)$ pure
- Per $t \in [-1, -\frac{1}{2}]$ abbiamo $x(t)$ sale e $y(t)$ continua a scendere
- Per $t \in [-\frac{1}{2}, 2]$ abbiamo che $x(t)$ e $y(t)$ salgono entrambe

Esempio 3 $\gamma(t) = (t^2+t, \sin^2 t)$ $t \in [-\pi, \pi]$

Semplicità e disegno

$$\boxed{\text{Sistema}} \quad \begin{cases} t^2+t = s^2+s & \leadsto t^2-s^2 = s-t \\ \sin^2 t = \sin^2 s & (t+s)(t-s) = -(t-s) \\ & (t-s)(t+s+1) = 0 \end{cases}$$

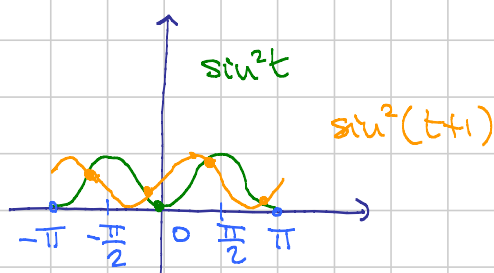
Dalla prima equazione ricaviamo 2 possibilità

$$\rightarrow t=s \quad \text{e}$$

$$\rightarrow t+s = -1 \quad \leadsto s = -t-1 \quad \leadsto \text{inseriamo nella 2ª eq.}$$

$$\sin^2 t = \sin^2(-t-1) \quad \leadsto \sin^2 t = \sin^2(t+1)$$

come $\sin^2 t$, ma traslata a sinistra di 1



Confronto delle intersezioni non banali, quindi NO semplice

Posso trovare esplicitamente due punti t ed s con $\delta(t) = \delta(s)$?

SI Impongo $t = \pi - (t+1) \quad \leadsto \quad 2t = \pi - 1$
 $\sin d = \sin(\pi - d) \quad \leadsto \quad t = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$
 $\leadsto \quad s = -t - 1 = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

Dico che $\delta\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) = \delta\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \stackrel{\text{ok}}{=} \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) \stackrel{?}{=} \sin^2\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

Infatti $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)$

Quando faccio i quadrati le cose si sistemano!

Oss. Per dimostrare che non è semplice basta verificare che

$$\delta\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) = \delta\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

Come farsi venire in mente i due pti strani? Provando a risolvere il sistema!!

— o — o —

ANALISI 2

— LEZIONE 41

[LOCKDOWN EDITION]

Note Title

20/04/2020

Forme differenzialiVedi AM2-14 Lezioni ≤ 40

Stabilire se una forma diff. è esatta e in caso affermativo trovare una primitiva.

Strumenti:

→ No chiusa $\Rightarrow$ No esatta

→ SI chiusa + insieme di def. sempl. connesso $\Rightarrow$ esatta
(ad esempio stellato)

NB Una forma può essere esatta in un certo insieme, ma non esatta in un altro insieme. Può anche accadere
 esatta in A NON esatta in $A \cup B$
 esatta in B

Esempi in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy \quad (\text{su tutto } \mathbb{R}^2)$$

① $\omega = dx = 1 \cdot dx + 0 \cdot dy$ Esatta $F(x,y) = x$

② $\omega = dx + dy$ " $F(x,y) = x + y$

③ $\omega = x dx + y dy$ Esatta $F(x,y) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2$

[Verifica!]

④ $\omega = x dx + x dy$ NON esatta. Mostriamo che non è chiusa

$$A_y(x,y) \stackrel{?}{=} B_x(x,y)$$

0 $\neq$ 1

⑤ $\omega = x^3 dy$ $A_y \stackrel{?}{=} B_x$ 0 $\neq$ $3x^2 \Rightarrow$ No chiusa $\Rightarrow$ No esatta

$$\textcircled{6} \quad \omega = x dx - y dy$$

$$A_y \stackrel{?}{=} B_x \quad 0 = 0 \Rightarrow \text{ok chiusa}$$

$$\mathbb{R}^2 \text{ sempl. conn.} \Rightarrow \text{esatta}$$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

$$\omega = y dx - x dy$$

$$A_y \stackrel{?}{=} B_x \quad 1 \neq -1$$

$$\text{NO chiusa} \Rightarrow \text{NO esatta}$$

$$\textcircled{7} \quad xy(dx+dy) = xy dx + xy dy$$

$$A_y \stackrel{?}{=} B_x$$

$$x \neq y$$

NO chiusa $\Rightarrow$ NO esatta

$$\textcircled{8} \quad \frac{dx}{x^2+1} + \frac{dy}{y^2+1}$$

$$A_y \stackrel{?}{=} B_x$$

$$0 = 0$$

chiusa + $\mathbb{R}^2$ sempl. conn.
 $\Rightarrow$ esatta

$$F(x,y) = \arctan x + \arctan y$$

Oss. Le forme del tipo

$$a(x) dx + b(y) dy$$

$\uparrow$ solo x $\uparrow$ solo y

solo sempre esatte con

$$F(x,y) = A(x) + B(y)$$

$\uparrow$ primitiva di a(x) $\uparrow$ primitiva di b(y)

$$\textcircled{9} \quad \frac{1}{y^2+1} dx + \frac{1}{x^2+1} dy$$

$$A_y \stackrel{?}{=} B_x$$

$$-\frac{2y}{(y^2+1)^2} \neq -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Oss. Le forme del tipo $a(y) dx + b(x) dy$

solo quasi sempre NON chiuse e quindi non esatte, a meno che $a(y)$ e $b(x)$ siano funzioni costanti, oppure $a(y) = \alpha y + c_1$ e $b(x) = \alpha x + c_2$

$A_y = B_x \Leftrightarrow a'(y) = b'(x)$ e due funzioni di variabili diverse possono essere uguali solo se sono costanti,

$$\textcircled{10} \quad (x-y)dx + (y-x)dy \quad \begin{array}{l} A_y = B_x \\ -1 = -1 \end{array}$$

Chiusa + def. in $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ esatta

$$F(x,y) = \frac{1}{2} (x-y)^2$$

$$\textcircled{11} \quad (x+y)dx + xdy \quad \begin{array}{l} A_y = B_x \\ 1 = 1 \end{array}$$

chiusa ed esatta

$$F(x,y) = \frac{1}{2} x^2 + xy$$

$$\textcircled{12} \quad (x^2+y^2)dx + 2xydy \quad \begin{array}{l} A_y = B_x \\ 2y = 2y \end{array}$$

chiusa ed esatta!

$$F(x,y) = \frac{1}{3} x^3 + xy^2 \quad [\text{Verifica!}]$$

$$\textcircled{13} \quad e^{x^2y} (2xydx + x^2dy) = 2xye^{x^2y} dx + x^2e^{x^2y} dy$$

Si può fare la verifica della chiusura, ma ad occhio

$$F(x,y) = e^{x^2y}$$

$$\textcircled{14} \quad (xe^{x^2} + y)dx + (\arctan y + x)dy \quad \begin{array}{l} A_y \stackrel{?}{=} B_x \\ 1 = 1 \end{array}$$

è chiusa e quindi (siamo in $\mathbb{R}^2$) esatta

$$F(x,y) = \frac{1}{2} e^{x^2} + xy + \text{primitiva di } \arctan y \quad [\text{Verifica!}]$$

↑ si calcola per parti

$$y \arctan y - \frac{1}{2} \log(1+y^2)$$

Forme diff. in $\mathbb{R}^3$ (ora la chiusura sono 3 verifiche
 $A_y = B_x$, $A_z = C_x$, $B_z = C_y$)

$$\omega = A(x,y,z) dx + B(x,y,z) dy + C(x,y,z) dz$$

① $3dx + ydy - 2dz \rightsquigarrow$ a occhio $F(x,y,z) = 3x + \frac{1}{2}y^2 - 2z$
 [Verifica!]

② $\omega = \sin z dx + x \cos z dz \rightsquigarrow$ a occhio $F(x,y,z) = x \sin z$

③ $\omega = xdx + ydy + zdz \rightsquigarrow$ a occhio $F(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$

④ $\omega = xdx + zdy + ydz \rightsquigarrow$ a occhio $F(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + yz$

⑤ $\omega = ydx + zdy + xdz$

$A_y = B_x$	$1 = 0$	no!
$A_z = C_x$	$0 = 1$	
$B_z = C_y$	$1 = 0$	

⑥ $ydx + (z+x)dy + ydz$

$A_y = B_x$	$1 = 1$	☺
$A_z = C_x$	$0 = 0$	☺
$B_z = C_y$	$1 = 1$	☺

Chiusa + $\mathbb{R}^3$ sempre conn. $\Rightarrow$ esatta

$F(x,y,z) = xy + yz$ [Verifica!]

⑦ $(x+z)dx + (y+z)dy + (x+y)dz$

$A_y = B_x$	$0 = 0$	☺
$A_z = C_x$	$1 = 1$	☺
$B_z = C_y$	$1 = 1$	☺

Quindi è chiusa e quindi esatta

$F(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xz + \frac{1}{2}y^2 + yz$ ☺

$$\textcircled{8} \quad yz \, dx + z \, dy + xy \, dz \quad F(x,y,z) = xyz \quad \textcircled{u}$$

$$\textcircled{9} \quad (x+y+z) \, (dx+dy+dz) \quad F(x,y,z) = \frac{1}{2} (x+y+z)^2$$

$$\textcircled{10} \quad x \, dx + (y^2 - z) \, dy - y \, dz$$

$$\begin{array}{lll} A_y = B_x & 0 = 0 & \textcircled{u} \\ A_z = C_x & 0 = 0 & \textcircled{u} \\ B_z = C_y & -1 = -1 & \textcircled{u} \end{array}$$

È chiusa e quindi esatta

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} y^3 - yz \quad \text{Verifica} \quad \textcircled{u}$$

$$\textcircled{11} \quad (x^2 + y^2 + z^2) \, (dx + dy + dz) \quad A_y = B_x \quad 2y \neq 2x \quad \textcircled{f}$$

Non è chiusa, quindi NON è esatta!!

$$\textcircled{12} \quad e^{x+2z} \, dx + y^3 \, dy + \alpha e^{x+2z} \, dz$$

Stabilire per quali valori di α è esatta.

$$\begin{array}{lll} A_y = B_x & 0 = 0 & \textcircled{u} \\ B_z = C_y & 0 = 0 & \textcircled{u} \\ A_z = C_x & 2e^{x+2z} = \alpha e^{x+2z} & \text{Sono uguali} \Leftrightarrow \alpha = 2 \end{array}$$

Per $\alpha \neq 2$ non è chiusa e quindi non è esatta

Per $\alpha = 2$ è chiusa e quindi (essendo in $\mathbb{R}^3$ che è sempl. conn.) è esatta. Per $\alpha = 2$ una primitiva è

$$F(x,y,z) = e^{x+2z} + \frac{1}{4} y^4 \quad [\text{Verifica!}]$$

— o — o —

ANALISI 2

[LOCK DOWN EDITION]

LEZIONE 42

Note Title

20/04/2020

Integrale di forme differenziali lungo curve

$$\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a, b]$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \{A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)\} dt$$

Strategie per il calcolo (vedi teoria):

- ① uso la definizione
- ② spero che la forma sia esatta, calcolo una primitiva $F(x, y)$ e poi "sostituisco gli estremi"

$$\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

$\uparrow F(x(b), y(b)) \quad \quad \quad \uparrow F(x(a), y(a))$

- ③ spero che la forma sia chiusa (se è esatta, ancora meglio) e poi uso la definizione cambiando la curva data con una nuova curva che ha gli stessi estremi ed è OMOTOPA a quella data (si ottiene "deformando" quella data)
- ④ Sostituisco γ con una curva che percorre lo stesso sostegno (riparametrizz.)

Esempio 1

$$\omega = xy dx + x^2 dy$$

$$\gamma(t) = (t+t^3, t) \quad t \in [0, 1]$$

$x(t) \quad y(t)$

1° modo

Definizione bovina:

$$\int_0^1 \omega = \int_0^1 \left\{ \underbrace{(t+t^3)}_{x(t)} \underbrace{t}_{y(t)} \underbrace{(1+3t^2)}_{\dot{x}(t)} + \underbrace{(t+t^3)}_{x(t)} \underbrace{t^2}_{y(t)} \cdot \underbrace{1}_{\dot{y}(t)} \right\} dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 + t^4 + 1 + 2t^2 + t^3 + t^5) dt = \int_0^1 (1 + 3t^2 + t^3 + t^4 + t^5) dt = 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

[Dopo video: questa moltiplicazione ha palesemente dei problemi :)]

2° modo Non è esatta $A_y \neq B_x$ $x \neq y^2$ $\ddot{\circ}$

3° modo Non è chiusa

Esempio 2 $\omega = dx + y dy$ $\gamma(t) = (\sin^4 t, \cos(2t))$ $t \in [0, \pi]$

1° modo $\int_{\gamma} \omega = \int_0^{\pi} \left\{ \underbrace{1}_{x'(t)} \cdot \underbrace{4 \sin^3 t \cdot \cos t}_{y'(t)} + \underbrace{\cos(2t)}_{y(t)} \underbrace{(-2 \sin(2t))}_{\dot{y}(t)} \right\} dt$

$$= \int_0^{\pi} \{ 4 \sin^3 t \cdot \cos t - \sin(4t) \} dt$$

$$= \left[\sin^4 t + \frac{1}{4} \cos(4t) \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$$

2° modo ω è esatta con primitiva $F(x, y) = x + \frac{1}{2} y^2$ [Verifica!]

$$\gamma(0) = (0, 1) \quad \gamma(\pi) = (0, 1)$$

$$\int_{\gamma} \omega = F(0, 1) - F(0, 1) = 0$$

Oss. Se ω non è esatta, allora $\int_{\gamma} \omega$ può venire $\neq 0$ anche se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Se ω è esatta e $\gamma(a) = \gamma(b)$, allora per forza $\int_{\gamma} \omega = 0$.

3° modo ω è chiusa, quindi posso sostituire la curva con una più comoda con gli stessi estremi, in questo caso la curva costante, per cui $\dot{x}(t) \equiv \dot{y}(t) \equiv 0$.

Oss. Se Ω insieme è sempre connesso, due curve con gli stessi estremi sono sempre omotope.

Esempio 3 $\omega = (x+y)dx + x dy$

$$\gamma(t) = (t^{10} + e^t, t^2 + e^{t^2}) \quad t \in [0, 1]$$

1° modo

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \left\{ \underbrace{(t^{10} + e^t + t^2 + e^{t^2})}_{x(t) + y(t)} \underbrace{(10t^9 + e^t)}_{\dot{x}(t)} + \underbrace{(t^{10} + e^t)}_{x(t)} \underbrace{(2t + 2te^{t^2})}_{\dot{y}(t)} \right\} dt$$

= non ne ho molta voglia ☹️

2° modo

ω è esatta con primitiva $F(x,y) = \frac{1}{2} x^2 + xy$ [Verifica!]

$$\gamma(0) = (1,1) \quad \gamma(1) = (1+e, 1+e)$$

$$\int_{\gamma} \omega = F(1+e, 1+e) - F(1,1) = \frac{1}{2} (1+e)^2 + (1+e)^2 - \frac{3}{2} = \text{😊}$$

3° modo

ω è chiusa, quindi posso provare con una curva più comoda che collega $(1,1)$ a $(1+e, 1+e)$

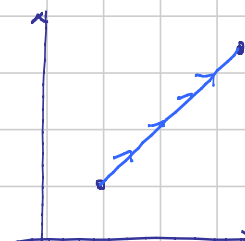
ad esempio la dirrettissima

$$\hat{\gamma}(t) = (t, t) \quad \text{con } t \in [1, 1+e]$$

Uso la def. con la nuova curva

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\hat{\gamma}} \omega = \int_1^{1+e} \underbrace{(2t \cdot 1)}_{x+y} \underbrace{dt}_{\dot{x}} = \text{😊}$$

↑ verificare che venga uguale al precedente



Esempio 4 $\omega = (x^2 y^2) dx + (y^2 + x^2) dy$

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [0, \frac{1}{2}]$$

$$A_y \stackrel{?}{=} B_x$$

$2y \neq 2x \Rightarrow$ No chiusa e no esatta
 $\Rightarrow$ addio strategie ② e ③

1° modo

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 \cdot \underbrace{1}_{\dot{x}(t)} + 1 \cdot (\sqrt{1-t^2})' \right\} dt$$

$$= \left[t + \sqrt{1-t^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} - 1$$

4° modo Consideriamo la curva

$$\hat{\gamma}(t) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Osserviamo che $\hat{\gamma}$ percorre lo stesso sostegno, ma in senso opposto. Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= - \int_{\hat{\gamma}} \omega = - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 \cdot (-\sin \theta) + 1 \cos \theta) d\theta \\ &\quad \uparrow \text{verso percorrenza} \quad \uparrow \text{verso percorrenza} \quad \uparrow \text{verso percorrenza} \quad \uparrow \text{verso percorrenza} \\ &\quad \text{è opposto} \quad \times \hat{y}^2 \quad \times 1\theta \quad \times \hat{y}^2 \quad \times y(\theta) \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta - \cos \theta) d\theta = [-\cos \theta - \sin \theta]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{😊} \end{aligned}$$

[Come sempre, fare le cose in 2 modi diversi rivela gli errori!]

Esempio 5 $\omega = (y + \arctan x) dx + (x + \arctan y) dy$

$$\gamma(t) = (\sin^3 t, \cos^5 t) \quad t \in [0, 4\pi]$$

1° modo Poco raccomandabile $\therefore$

2° modo $A_y \stackrel{?}{=} B_x \quad 1 = 1 \quad \text{😊} \quad \text{Chiusa} \xrightarrow{\text{su } \mathbb{R}^2} \text{esatta}$

$$\gamma(0) = (0, 1) = \gamma(4\pi) \Rightarrow \text{stessi estremi} \Rightarrow \int_{\gamma} \omega = 0 \text{ senza nemmeno bisogno di calcolare } F(x, y)$$

Esempio 6 $x(dx + dy) \quad \gamma(t) = (\sin t, \cos t) \quad t \in [0, 4\pi]$

Osservo che γ percorre la circ. trigonometrica a partire da $(0, 1)$ 2 volte in verso orario.

Osservo che $x dx + x dy$ non è chiusa $\Rightarrow$ non esatta ($A_y=0, B_x=1$)
 Quindi restano ① e ④, ma fortunatamente la curva è decente

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{4\pi} (\sin t \cdot \cos t + \sin t (-\sin t)) dt = \text{si fa facile.}$$

Esempio 7 $\omega = x \sin(xy) dx + y \cos(xy) dy$
 $\gamma(t) = (t, 2t) \quad t \in [0, \pi]$

ω è esatta? $A_y = x^2 \cos(xy)$
 $B_x = -xy \sin(xy)$ 😞
 $\leadsto$ resta solo la definizione

Esempio 8 $\omega = e^{xy} y dx + e^{xy} x dy$

$$\gamma(t) = (t^3 + t^6, t + t^7) \quad t \in [0, 1]$$

1° modo Integrale inquietante 😞

2° modo È esatta con $F(x, y) = e^{xy}$ [Verifica!]

$$\int_{\gamma} \omega = F(2, 2) - F(0, 0) = e^4 - 1 \quad 😊$$

3° modo È chiusa e cambio la curva con la direttissima
 $\hat{\gamma}(t) := (t, t) \quad t \in [0, 2]$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\hat{\gamma}} \omega = \int_0^2 2t e^{t^2} dt = [e^{t^2}]_{t=0}^{t=2} = e^4 - 1 \quad 😊$$

omotope in $\mathbb{R}^2$

— o — o —

ANALISI 2 - LEZIONE 43

[LOCK DOWN EDITION]

Note Title

22/04/2020

Integrali lungo curve di forme diff. (4 strategie)

Esempio 1 $\omega = dz$ $\gamma(t) = (t^{20}, 1+2t, \cos t)$ $t \in [0, \pi]$

1° modo Def. bovina: $\int_{\gamma} \omega = \int_0^{\pi} 1 \cdot (-\sin t) dt = -2$
 $\uparrow \dot{z}(t)$

2° modo Spero nell'esattezza $\therefore F(x, y, z) = z$

$$\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = -1 - 1 = -2 \quad \therefore$$

3° modo È chiusa, quindi uso curva alternativa tra gli stessi p.ti

$$\gamma(0) = (0, 1, 1) \quad \gamma(\pi) = (\pi^{20}, 1+2\pi, -1)$$

La curva la costruisco "unendo", cioè perconendo una di seguito all'altra tre curve:

γ_1 da $(0, 1, 1)$ a $(\pi^{20}, 1, 1)$ in cui cambia solo la 1° coord.
 $\gamma_1(t) = (t, 1, 1)$ con $t \in [0, \pi^{20}]$

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0 = \int_0^{\pi^{20}} (0 \cdot \underbrace{\dot{x}(t)}_0 + 0 \cdot \underbrace{\dot{y}(t)}_0 + 1 \cdot \underbrace{\dot{z}(t)}_0) dt$$

γ_2 da $(\pi^{20}, 1, 1)$ a $(\pi^{20}, 1+2\pi, 1)$ fatta come prima con lo stesso integrale

Infine γ_3 da $(\pi^{20}, 1+2\pi, 1)$ a $(\pi^{20}, 1+2\pi, -1)$

$$\gamma_3(t) = (\pi^{20}, 1+2\pi, 1-t) \quad t \in [0, 2]$$

$$\int_{\gamma_3} \omega = \int_0^2 1 \cdot (-1) \cdot \underbrace{\dot{z}(t)}_{-1} dt = -2 \quad \text{☺}$$

Esempio 2 $\omega = y dx$ $\gamma(t) = (e^{\sin t}, e^{\sin t}, e^{\sin t})$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

ω non è chiusa, quindi NON è esatta $A_y \stackrel{?}{=} B_x$ $\neq 0$,
quindi addio a 2 e 3 come strategie

1° modo Def barina $\int_{\gamma} \omega = \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^{\sin t}}_{y(t)} \underbrace{e^{\sin t} \cos t}_{\dot{x}(t)} dt$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot e^{2\sin t} dt = \left[\frac{1}{2} e^{2\sin t} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2}$$

2° modo Non posso cambiare di brutto la curva, ma posso riparametrizzarla. La curva data percorre il segmento da $(1, 1, 1)$ fino a (e, e, e) (le 3 componenti sono sempre uguali)

La stessa cosa fa la curva $(t, t, t) = \tilde{\gamma}(t)$ con $t \in [1, e]$.

Usando questa otteniamo

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_1^e \underbrace{t}_{y(t)} \cdot \underbrace{1}_{\dot{x}(t)} dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{t=1}^{t=e} = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \quad \text{😊}$$

Esempio 3 $\omega = z^2 dx$ $\gamma(t) = (\cos(zt), t, \cos t)$ $t \in [0, \pi]$

ω non è chiusa, quindi non è esatta. $A_z \stackrel{?}{=} C_x$ $\neq 0$

Definizione: $\int_{\gamma} z^2 dx = \int_0^{\pi} \cos^2 t (-2 \sin(zt)) dt$
 $= -4 \int_0^{\pi} \sin t \cos^3 t dt = \left[\cos^4 t \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$

Esempio 4 $\omega = dx - dy - dz$
 $\gamma(t) = (\arctan t, \sin t, t^2)$ $t \in [0, 1]$

Forse la via + breve è sfruttare l'esattezza

$$F(x, y, z) = x - y - z \quad [\text{Verifica!}]$$

$$\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F\left(\frac{\pi}{4}, \sin 1, 1\right) - F(0, 0, 0) \\ = \frac{\pi}{4} - \sin 1 - 1$$

Esempio 5 $\omega = 2xyz \, dx + x^2z \, dy + x^2y \, dz$

$$\gamma(t) = (t, t^4 + 1, t(t-1)) \quad t \in [0, 1]$$

1° modo Definizione: non ne ho voglia, ma si farebbe

2° modo Primitiva: $F(x, y, z) = x^2yz$ [Verifica!]

$$\int_{\gamma} \omega = F(1, 2, 0) - F(0, 1, 0) = 0$$

3° modo È chiusa, quindi posso cambiare curva, ad esempio il segmento congiungente

$$\hat{\gamma}(t) = (0, 1, 0) + t(1, 1, 0) = (t, 1+t, 0) \text{ con } t \in [0, 1]$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\hat{\gamma}} \omega = \int_0^1 t^2(1+t) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ z(t)}}{0} \, dt = 0 \quad \text{☺}$$

Esempio 6 $(x^2 + y^2 + z^2)(x \, dx + y \, dy + z \, dz)$

$$\gamma(t) = (\sin t, \sin(2t), \sin(3t)) \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

La forma è esatta con $F(x, y, z) = \frac{1}{4} (x^2 + y^2 + z^2)^2$

↑ [cometto dopo video]

$$\int_{\gamma} \omega = F(1, 0, -1) - F(0, 0, 0) = 1$$

[Provare per esercizio con definizione e strategia 3]

LA SOLITA

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \quad \text{definita in } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

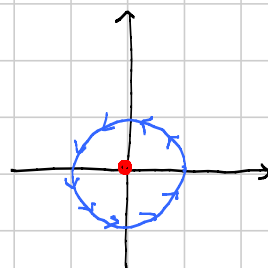
Si verifica (fatto!) che ω è CHIUSA, cioè $A_y = B_x$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Se fosse esatta, l'integrale su ogni curva chiusa dovrebbe venire 0. Ma se considero

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t} (-\sin t) + \frac{\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \cos t \right\} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$



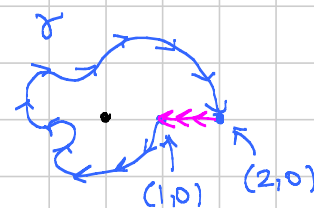
Oss 1 Le forme chiuse sono esatte sugli insiemi sempl. connessi. Ora $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON è sempl. connesso, quindi nulla di male. PERÒ il semipiano $y > 0$ è sempl. connesso (ad esempio perché è stellato) quindi in quella zona è esatta, quindi deve esistere una primitiva

Ad esempio $F(x,y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

$$F_x(x,y) = -\frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = -\frac{1}{y} \frac{y^2}{x^2+y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$F_y(x,y) = -\frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{x}{y^2} \frac{y^2}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{😊}$$

Oss 2 Calcolare $\int_{\gamma} \omega$



Osserviamo che, se a γ aggiungiamo una $\hat{\gamma}$ che unisce $(2,0)$ con $(1,0)$ otteniamo una curva che fa un giro intorno al buco in verso opposto rispetto a quella utilizzata sopra.

Detto meglio

$\gamma \cup \hat{\gamma}$ è omotopa a - curva usata sopra

$$\int_{\gamma \cup \hat{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\hat{\gamma}} \omega = - \text{integrale di sopra} = -2\pi$$

↑
ho usato che la formula
è chiusa

e quindi

$$\int_{\gamma} \omega = -2\pi - \int_{\hat{\gamma}} \omega \quad - \hat{\gamma}(t) = (t, 0) \text{ con } t \in [1, 2]$$

$$= -2\pi + \int_0^1 \frac{\frac{1}{t} \cdot 0}{x(t)^2 + y(t)^2} dt = -2\pi$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $x(t)$ $\dot{y}(t)$
 $\frac{x(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}$
 $\text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}$

ANALISI 2 — LEZIONE 44

[LOCK DOWN EDITION]

Note Title

22/04/2020

Lunghezza di una curva e integrali curvilinei

Cose da ripassare

- Def. Lunghezza (sup. Lunghe. poligonali)
- Esempio di curva di Lunghe. infinita
- Formula per il calcolo nel caso di curve C^1

$$\text{Lunghe}(\gamma) = \int_a^b \underbrace{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}_{\text{speed}} dt$$

- Def. di integrale curvilineo (integrale di una funzione lungo una curva, da non confondere mai con quello di una forma diff.)

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \underbrace{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}_{ds} dt$$

curva γ a valori in $\mathbb{R}^2$ funzione di 2 variabili dice che si tratta di integrale curvilineo

- Significato geometrico (interpretazione come profilo altimetrico della tappa)

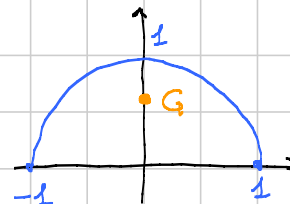
- Def. di baricentro di una curva $G = (x_G, y_G)$ con

$$x_G = \frac{1}{\text{Lunghe}(\gamma)} \int_{\gamma} x ds, \quad y_G = \frac{1}{\text{Lunghe}(\gamma)} \int_{\gamma} y ds$$

- Se percorro una curva in verso opposto, l'integrale di una forma diff. cambia segno, l'integrale lungo la curva di una funzione NO.

Esempio 1 Calcolare il baricentro di una semicirconferenza
(intesa come curva)

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$



Lunghezza $(\gamma) = \pi$ dalla geometria elementare,
ma anche dalla formula

$$\text{Lunghezza}(\gamma) = \int_0^\pi \sqrt{\underbrace{\sin^2 t}_{\dot{x}(t)^2} + \underbrace{\cos^2 t}_{\dot{y}(t)^2}} dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi \quad \checkmark$$

Ragioni di simmetria inducono a dire che $x_G = 0$

$$\int_\gamma y ds = \int_0^\pi \sin t \sqrt{\underbrace{\sin^2 t}_{\dot{x}^2} + \underbrace{\cos^2 t}_{\dot{y}^2}} dt = \int_0^\pi \sin t dt = 2$$

quindi

$$y_G = \frac{2}{\pi} > \frac{1}{2}$$

(ovvero il baricentro della semicirc.
come figura piana stava
sotto)

Casi speciali di formula per la lunghezza

1 Curva cartesiana

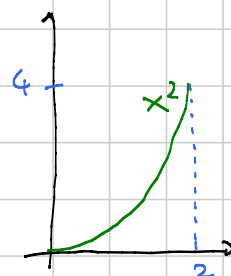
$$\gamma(t) = (t, f(t)) \quad \text{con } t \in [a, b]$$

$$\text{Lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \underbrace{f'(t)^2}_{\dot{y}(t)^2}} dt$$



Esempio Lunghezza tratto parabola

$$= \int_0^2 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \text{con un po' di fatica si fa}$$



2 Curva in coordinate polari : invece di rappresentarla come $(x(t), y(t))$, la rappresentiamo come $\rho(t), \theta(t)$, con $t \in [a, b]$

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \quad y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta + \rho (-\sin \theta) \dot{\theta} \quad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta$$

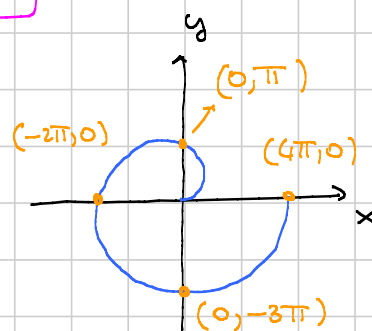
$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{\rho}^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \\ &\quad + \dot{\rho}^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \\ &= \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2 \dot{\theta}(t)^2} dt$$

Esempio $\rho = 2\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

La parametr. in coord. polari è $\theta(t) = t$ e $\rho(t) = 2t$ con $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \text{Lunghezza}(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\underset{\dot{\rho}^2}{4} + \underset{\rho^2}{4t^2} \cdot \underset{\dot{\theta}^2}{1}} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2} dt \\ &= \text{con un po' di fatica di fa} \end{aligned}$$

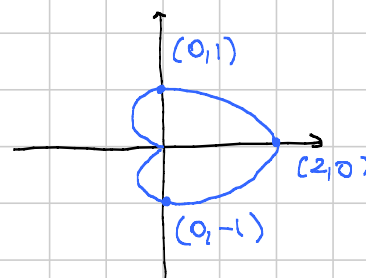


Esempio $\rho = (1 + \cos \theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

CARDIOIDE

In polari $\theta(t) = t \quad \rho(t) = 1 + \cos t$

$$\begin{aligned} \text{Lunghezza}(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + (1 + \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + 1 + \cos^2 t + 2\cos t} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt \end{aligned}$$



L' integrale si fa pensando che $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$
 $\cos t = 2\cos^2 \frac{t}{2} - 1$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos t} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\cos^2 \frac{t}{2}} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt = \text{si fa.}$$

③ Curva in coordinate sferiche $\rho(t), \theta(t), \varphi(t)$

Usando la versione dei geografi:

$$x(t) = \rho(t) \cos \varphi(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = \rho(t) \cos \varphi(t) \sin \theta(t)$$

$$z(t) = \rho(t) \sin \varphi(t)$$

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi \cos \theta - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \theta - \rho \dot{\theta} \cos \varphi \sin \theta$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \cos \varphi \sin \theta - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta$$

$$\dot{z} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 = & \boxed{\dot{\rho}^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta} + \boxed{\rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta} + \boxed{\rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta} \\ & - 2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi \cos^2 \theta - 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \cos^2 \varphi \cos \theta \sin \theta \\ & + 2\rho^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}^2 = & \boxed{\dot{\rho}^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta} + \boxed{\rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta} + \boxed{\rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta} \\ & - 2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta + \rho \dot{\rho} \dot{\theta} \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta \\ & - 2\rho^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\dot{z}^2 = \boxed{\dot{\rho}^2 \sin^2 \varphi} + \boxed{\rho^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi} + 2\rho \dot{\rho} \sin \varphi \cos \varphi$$

Sommando resta $\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi$

Di conseguenza

$$Lunghe(\sigma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2 \dot{\varphi}(t)^2 + \rho(t)^2 \dot{\theta}(t)^2 \cos^2 \varphi(t)} \, dt$$

Rapporto tra integrali di funzioni e forme diff.

$$\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a,b]$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \{ A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \} dt$$

$$= \int_a^b \left(A(x,y) \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + B(x,y) \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

per brevità
non metto $\dot{x}$
dentro

Prodotto scalare tra (A,B) ed il vettore tangente
alla curva

In questa scrittura l'integrale di una forma diventa
l'integrale curvilineo del prodotto scalare tra il vettore (A,B)
ed il vettore tangente alla curva.

(N.B. se cambio verso alla curva, il vettore tangente cambia
segno, e quindi l'integrale della forma pure).

— o — o —

ANALISI 2

[Lock Down Edition]

- LEZIONE 45

Note Title

23/04/2020

Superfici e integrali superficiali

Presentazione di una superficie:

- implicita
- cartesiana
- parametrica

- Piano tangente
- Vettore normale

Area di una superficie : → come NON si può definire
 → come si può definire
 → Formula per il calcolo nel caso parametrico

Integrali superficiali : → definizione
 → formula per il calcolo

Esempio 1 $\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 - v & 2u + v & v^2 + uv \end{pmatrix}$
 $\begin{matrix} x(u, v) & y(u, v) & z(u, v) \end{matrix}$
 $u \in [-1, 1] \quad v \in [-1, 2]$

$$J\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 2 & v \\ -1 & 1 & 2v + u \end{pmatrix} \begin{matrix} \phi_u \\ \phi_v \end{matrix}$$

Consideriamo il punto $(0, 0, 0)$ della superficie, che corrisponde a $u=0$ e $v=0$.

Il piano tangente alla sup in $(0, 0, 0)$ è lo span di $\phi_u(0, 0)$ e $\phi_v(0, 0)$

Nel vostro caso $\text{span}((0,2,0), (-1,1,0)) = t(0,2,0) + s(-1,1,0)$
 Se voglio l'eq. del piano

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0,0,2) \rightsquigarrow (0,0,1) \text{ è un vettore, anzi } \\ \text{vettore, } \perp \text{ al piano.}$$

Il piano tangente è $z=0$.

Cambiamo p.to $u=1$ e $v=1$ producono $(0,3,2)$.

Il piano tangente in $(0,3,2)$ è

$$(0,3,2) + t(2,2,1) + s(-1,1,3)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (5, -7, 4) \quad [\text{Verifica ortogonalità}]$$

↑ vettore $\perp$ alla superficie

$$5x - 7y + 4z = -13 \quad \text{piano tangente.}$$

Per calcolare l'area occorre fare

$$\iint_{\text{sp. parametri}} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv = (*)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2u & 2 & v \\ -1 & 1 & 2u+v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4u+v & -4u^2-2uv+v & 2u+2 \end{pmatrix}$$

$M_1 \qquad M_2 \qquad M_3$

$$\begin{aligned} \star &= \int_{-1}^1 du \int_{-1}^2 dv \sqrt{(4u+v)^2 + (-4u^2-2uv+v)^2 + (2u+2)^2} \\ &= \text{di solito sono conti duri...} \end{aligned}$$

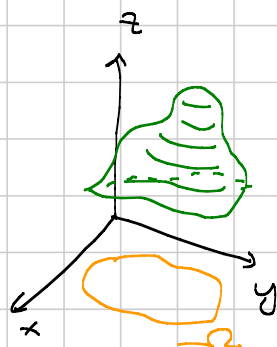
Caso cartesiano speciale : La sup. è un grafico $z = f(x, y)$
con $(x, y) \in \text{base} = \Omega$

Parametrizz. : $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_u(u, v) \\ 0 & 1 & f_v(u, v) \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (-f_u(u, v), -f_v(u, v), 1)$$

$$\text{Area} = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, du \, dv$$



Formula per integrali superficiali

$$\int_S \underbrace{f(x, y, z)}_{\substack{\uparrow \\ \text{funzione di 3 variabili}}} \underbrace{d\sigma}_{\substack{\uparrow \\ \text{superficie}}} \leftarrow \text{integrale superficiale}$$

$$\int_S f(x, y, z) \, d\sigma = \iint_{\Omega} f(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv$$

dove si intende che la sup è $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

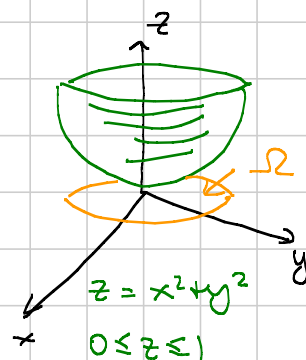
Esempio di uso calcolo

$$\int_S (x + y^2) \, d\sigma$$

" per simmetria

$$\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$



$$J\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (-2u, -2v, 1)$$

$$\int_S y^2 d\sigma = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \underbrace{u^2}_{\uparrow y^2} \underbrace{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}_{\uparrow \sqrt{\dots}} du dv = \text{volendo fattibile}$$

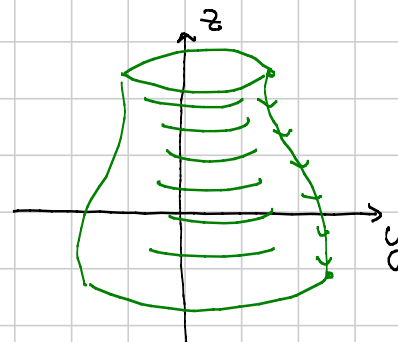
Superfici di rotazioni

Consideriamo una curva

$$\gamma(t) = (y(t), z(t)) \text{ con } t \in [a, b]$$

a valori nel piano yz .

Ruotando intorno all'asse z descrive una superficie di parametrizzazione



$$\phi(t, \theta) = (\underbrace{y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta}_{\text{circonferenza di raggio } y(t)}, z(t))$$

$$t \in [a, b]$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$\uparrow$
se la rotazione
è completa

Calcoliamo

$$J\phi(t, \theta) = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \cos \theta & \dot{y}(t) \sin \theta & \dot{z}(t) \\ -y(t) \sin \theta & y(t) \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (-\dot{z}(t) y(t) \cos \theta, -\dot{z}(t) y(t) \sin \theta, y(t) \dot{y}(t))$$

$\uparrow$
[Corretto dopo video]

$$\text{Area} = \int_a^b dt \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{y(t)^2 \dot{z}(t)^2 + y(t)^2 \dot{y}(t)^2}$$

$$= 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

$\uparrow$ vale se $y(t) \geq 0$ sempre

Formula:

$$\text{Area} = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Quello a dx è un integrale curvilineo

$$\int_a^b y(t) \sqrt{\dots} dt = \int_{\gamma} y ds$$

$$\text{Area} = 2\pi \int_{\gamma} y ds$$

Se moltiplico e divido per la lunghezza di γ trovo

$$\text{Area} = 2\pi y_G \cdot \text{lunga } \gamma$$

Teorema di Guldino per
le aree delle sup. di
rotazione

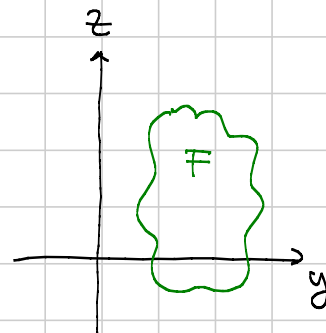
lunga. curva
che ruota
lunga. circ. percorsa
dal baricentro durante la rotazione.

Volume solido di rotazione

Rappresentazione del solido

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in F\} = V$$

↑
distanza
dall'asse z



$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \iint_{(r,z) \in F} dr \, dz \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \rho \\ &= 2\pi \iint_F \rho \, dr \, dz \end{aligned}$$

↑
j delle coord.
cilindriche

Formula

$$\text{Vol}(V) = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz$$

Se moltiplico e divido per l'area di F trovo

$$\text{Vol}(V) = 2\pi y_G \cdot \text{Area}(F)$$

↑
coord. y del
baricentro della figura
che ruota

Teorema di Guldino per
il volume di un
solido di rotazione

Oss. Nel caso in cui la curva sia del tipo
cartesiano

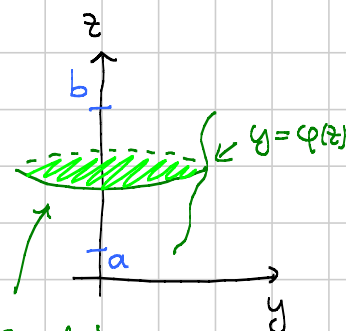
$$\text{Area}(\text{Sup}) = 2\pi \int_a^b \varphi(z) \sqrt{1 + \varphi'(z)^2} \, dz$$

$$\text{Vol}(\text{solido}) = 2\pi \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} y \, dy$$

$$= \pi \int_a^b \varphi(z)^2 \, dz$$

↑
Qui si arrivava anche calcolando il volume
per sezioni

— o — o —



$S_z =$ cerchio
di raggio $\varphi(z)$

ANALISI 2

[Lock Down Edition]

- LEZIONE 46

Note Title

23/04/2020

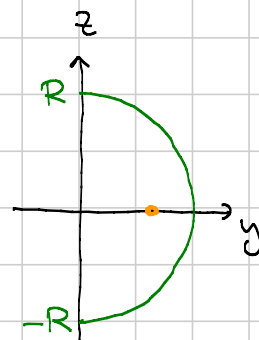
Esercizi sui solidi di rotazioneEsempio 1 Superficie della sfera

$$\text{Area (Sfera)} = 2\pi \int_{\gamma} y \, ds$$

$$\gamma(t) = (R \sin t, R \cos t) \quad \text{con } t \in [0, \pi]$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \underset{\uparrow y(t)}{R \sin t} \sqrt{\underset{\uparrow \dot{y}(t)^2}{R^2 \cos^2 t} + \underset{\uparrow \dot{z}(t)^2}{R^2 \sin^2 t}} \, dt$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin t \, dt = 4\pi R^2$$

2° modo, in realtà uguale

$$\text{Area}(S) = 2\pi \underset{\frac{2}{\pi}R}{y_G} \cdot \underset{\pi}{\text{lunghezza}(\gamma)} = 4\pi R^2$$

$\uparrow$ vedi qualche les. precedente

3° modo : parametrizzando con le sfere

$$\Phi(\theta, \varphi) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi) \quad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi] \\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array}$$

$$\Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \theta & R \cos \varphi \cos \theta & 0 \\ -R \sin \varphi \cos \theta & -R \sin \varphi \sin \theta & R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (R^2 \cos^2 \varphi \cos \theta, R^2 \cos^2 \varphi \sin \theta, R^2 \cos \varphi \sin \varphi)$$

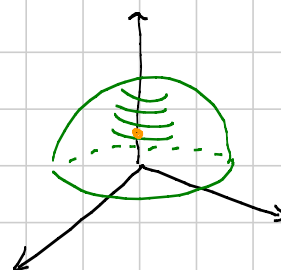
$$\begin{aligned}
 \text{Area} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, R^2 \sqrt{\cos^4 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} \\
 &= R^2 \cdot 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi = 4\pi R^2 \quad \text{😊}
 \end{aligned}$$

Da ricordare: $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = R^2 \cos \varphi$

Esempio 2 Baricentro di una semisfera, intesa come superficie.

La definizione è "la solita"

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}} \int_S x \, d\sigma, \quad y_G = \dots, \quad z_G = \dots$$



Per ragioni di simmetria è evidente che $x_G = y_G = 0$, cioè sta sull'asse z . Occorre calcolare z_G . Sarà sopra o sotto la metà?

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{semisfera}} z \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \pi [\sin^2 \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi
 \end{aligned}$$

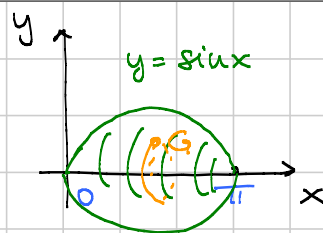
Quindi

$$z_G = \frac{1}{\text{area}} \int z \, d\sigma = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \quad \text{😊}$$

Esempio 3 Calcolare $\int_{\text{semisfera}} x^2 \, d\sigma$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, \underbrace{\cos^2 \varphi \cos^2 \theta}_{x^2} \underbrace{\cos \varphi}_{\sqrt{\dots}} = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta}_{\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \, d\varphi}_{\text{si fa}}$$

Esempio 4 Consideriamo il solido ottenuto ruotendo la figura intorno all'asse x .
Calcolare volume e area superficie



1° modo Volume = $\pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \pi^2$
 $\uparrow$
 sezioni rispetto asse x , oppure formula

Superficie = $2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx$ = con un po' di fatica si fa

2° modo Guldino per il volume. Devo calcolare il baricentro della figura. È chiaro che $x_G = \frac{\pi}{2}$ per simmetria

$$\iint_F y \, dx \, dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}$$

$$y_G = \frac{\frac{\pi}{4}}{\text{Area}(F)} = \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Volume} = 2\pi \cdot y_G \cdot \text{Area} = 2\pi \cdot \frac{\pi}{8} \cdot 2 = \frac{\pi^2}{2} \quad \ddot{\smile}$$

Oss. Ho prima diviso e poi moltiplicato per l'area

Per la superficie potevo fare lo stesso conto.

Scrivere l'equazione del solido ottenuto.

Curva $\rightsquigarrow y = \sin x \quad x \in [0, \pi]$

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \sin x$$

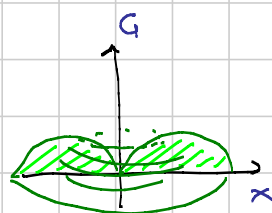
$\uparrow$
Distanza dall'asse x

$$\rightsquigarrow y^2 + z^2 = \sin^2 x$$

$x \in [0, \pi]$

Esempio 5 Stessa cosa ruotando intorno all'asse y

$$\text{Volume} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Guldino}}}{2\pi \times G} \cdot \text{Area} = 2\pi \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simmetria}}}{\frac{\pi}{2}} \cdot 2 = 2\pi^2$$



$$\text{Superficie} = 2\pi \times G \cdot \text{lunghezza curva}$$

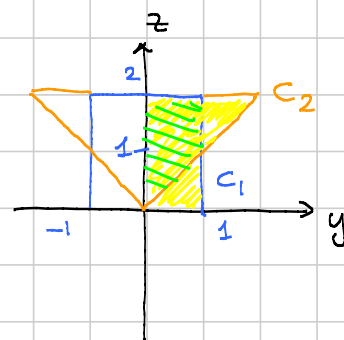
$$= 2\pi \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simmetria}}}{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx = \text{non so se si fa}$$

Achtung! Il baricentro della curva e della figura sono diversi, ma hanno la stessa coordinata x .

Esempio 6 $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 2]\}$
 $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, z \in [0, 2]\}$

Calcolare volume e sup e coord. baricentro di $C_1 \cap C_2$ e $C_1 \cup C_2$

C_1 = cilindro C_2 = cono



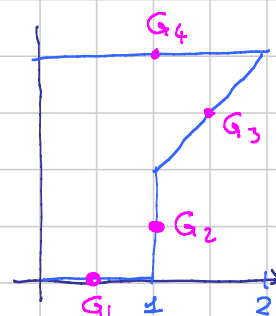
$\text{Vol}(C_1 \cup C_2) = \text{sezioni lungo asse } z$

$$= \int_0^1 dz \, \text{area}(S_z) + \int_1^2 dz \, \text{area}(S_z)$$

$$= \pi \int_0^1 dz + \pi \int_1^2 z^2 dz = \text{si fa}$$

$$\text{Vol}(C_1 \cap C_2) = \pi \int_0^1 z^2 dz + \pi \int_1^2 1 dz = \text{si fa}$$

$\text{Area Sup}(C_1 \cup C_2) = \text{unione di 4 pezzi che si ottengono ruotando 4 segmenti}$

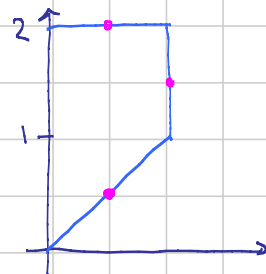


$$= 2\pi \{ y_{G_1} \cdot l_1 + y_{G_2} \cdot l_2 + y_{G_3} \cdot l_3 + y_{G_4} \cdot l_4 \}$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 2 \right\} = \text{si fa}$$

$$\text{Area Sup}(C_1 \cap C_2) =$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{2} + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right\}$$



L'unica coordinata non banale del baricentro è la z , che richiede di integrare z sul solido. Ad esempio

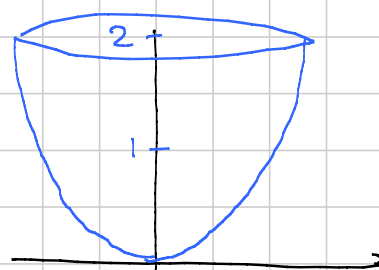
$$\iiint_{C_1 \cap C_2} z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \, z \, \pi z^2 + \int_1^2 dz \, z \cdot \pi = \text{si fa.}$$

$$\text{Aggiungiamo } P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}$$

Volume di $C_2 \cap P$

$$\text{Vol} = \pi \int_0^1 z^2 \, dz + \pi \int_1^2 z \, dz$$

↑
la sezione ha
raggio $\sqrt{z}$

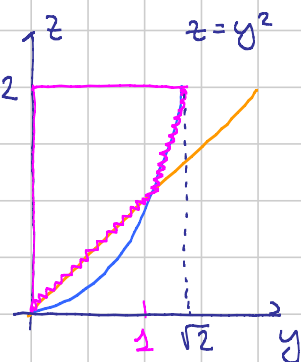


La superficie è fatta da 3 pezzi

$$\text{"pezzo di cono"} = 2\pi y_G \cdot \text{lung} = 2\pi \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{"base in alto"} = \pi (\sqrt{2})^2 = 2\pi$$

$$\begin{aligned} \text{"pezzo di paraboloide"} &= 2\pi \int_1^2 \varphi(z) \sqrt{1 + \varphi'(z)^2} \, dz && \text{pensando all'eq. } y = \sqrt{z} \\ &= 2\pi \int_1^2 \sqrt{z} \sqrt{1 + \frac{1}{4z}} \, dz = 2\pi \int_1^2 \sqrt{z} \frac{\sqrt{4z+1}}{2\sqrt{z}} \, dz = \pi \int_1^2 \sqrt{4z+1} \, dz \\ &= \text{si fa facile} \end{aligned}$$



ANALISI 2

LEZIONE 47

[Lock Down Edition]

Note Title

26/04/2020

Ancora solidi di rotazione

Esempio 1 Calcolare il baricentro di un cono come solido e della sua sup. laterale (come superficie)

L'eq. della retta che ruota è $z = \frac{R}{r} (r-y)$

Volume = $\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot R$ (dalla geometria elem.)



Facciamo i conti

$$\iiint_{\text{cono}} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^R dz \, \text{Area}(S_z)$$

↑
cerchio di raggio
 $\frac{r(R-z)}{R}$

$$= \pi \frac{r^2}{R^2} \int_0^R (R-z)^2 dz = \frac{\pi r^2}{R^2} \int_0^R t^2 dt = \frac{\pi r^2}{R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 = \dots$$

↑
 $R-z=t$
...

$$\begin{aligned} \iiint_{\text{cono}} z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz = \frac{\pi r^2}{R^2} \int_0^R z (R-z)^2 dz \\ &= \frac{\pi r^2}{R^2} \int_0^R z^2 (R-z) dz = \frac{\pi r^2}{R^2} \left[\frac{1}{3} R z^3 - \frac{1}{4} z^4 \right]_0^R \\ &= \frac{\pi r^2}{R^2} \frac{1}{12} R^4 = \frac{1}{12} \pi r^2 R^2 \end{aligned}$$

Quindi

$$z_G = \frac{\frac{1}{12} \pi r^2 R^2}{\frac{1}{3} \pi r^2 R} = \boxed{\frac{1}{4} R} \quad x_G = y_G = 0$$

Oss. geometrica $\rightarrow$ Il baricentro di un segm. verticale sta a $\frac{1}{2}$ altezza



$\rightarrow$ Il baricentro di un triangolo sta ad $\frac{1}{3}$ altezza

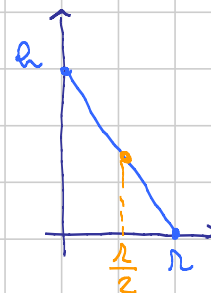


$\rightarrow$ Il baricentro di un cono (o piramide) sta ad $\frac{1}{4}$ altezza.

$$\text{Area superficie} = 2\pi y_G \cdot \text{lunghezza segmento}$$

$\uparrow$ Guldizio $\uparrow$ $\frac{r}{2}$

$$= \pi r \sqrt{r^2 + R^2}$$



$$\int_{\text{Sup. cono}} z \, d\sigma = \int_a^b z(t) \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, dt$$

Infatti occorre parametrizzare il segmento

$$(y(t), z(t)) = (r - rt, Rt) \quad t \in [0, 1]$$

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \text{des. precedenti} = y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \cdot 2\pi$$

$\uparrow$
già integrato in 8

$$= 2\pi \int_0^1 Rt (r - rt) \sqrt{r^2 + R^2} \, dt$$

$$= 2\pi R r \sqrt{r^2 + R^2} \int_0^1 t(1-t) \, dt = \pi R r \sqrt{r^2 + R^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$\left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1$

Dividendo

$$z_G = \frac{1}{3} R$$

$$x_G = y_G = 0$$

Oss. Come scrivo una param. della sup. Portale del corso?

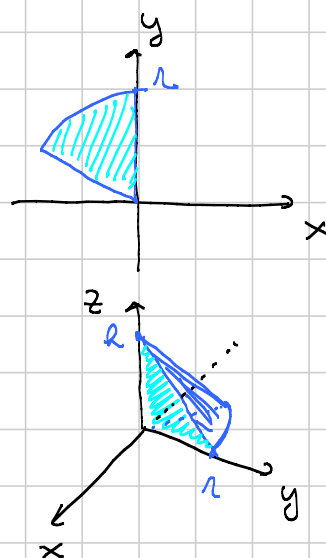
$$(y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))$$

$$= (r(1-t) \cos \theta, r(1-t) \sin \theta, 2t)$$

Esempio 2 Supponiamo di ruotare lo stesso triangolo, ma solo di $\frac{\pi}{3}$ e non di 2π .

Dove viene a trovarsi il baricentro del nuovo solido.

Supponiamo la rotazione verso le x negative



Dal punto di vista della z non cambia nulla (volume e $\iiint z$ sono entrambi divisi per 6).

Se vogliamo calcolare x_G serve

$$\iiint_{\text{cono}} x \, dx \, dy \, dz = \text{coord. cilindriche}$$

$$\dots \quad x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad z$$

$$\rho \in [0, r]$$

$$\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$$

$$= \int_0^r d\rho \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} d\theta \int_0^{\frac{r}{2}(1-\rho)} \rho \cos \theta \cdot \rho \, dz$$

↑ jacobiano

$$0 \leq z \leq \frac{r}{2}(1-\rho)$$

$$= \int_0^r \rho^2 \frac{r}{2}(1-\rho) \, d\rho \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos \theta \, d\theta = \text{si fa facile.}$$

Stessa cosa se volevamo l'integrale di y .

Stessa cosa per la superficie

$$\int_{\text{sup cono}} x \, d\sigma =$$

Scriviamo la parametrizzazione

$$(r(1-t)\cos\theta, r(1-t)\sin\theta, Rt) \quad t \in [0, 1], \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$$

$$= \int_0^1 dt \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} d\theta \underbrace{r(1-t)\cos\theta}_{x(t,\theta)} \underbrace{r(1-t)\sqrt{r^2+R^2}}_{\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}}$$

$$= r^2 \sqrt{r^2+R^2} \int_0^1 (1-t)^2 dt \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos\theta \, d\theta = \text{si fa}$$

Esempio 3 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

Ruotiamo intorno all'asse y di $\frac{3\pi}{2}$ andando verso le z negative

(Ruotiamo "tutto sotto" e poi ancora "metà sopra")

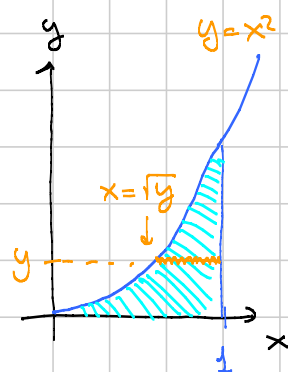
Vogliamo volume e coordinate baricentro

$$\text{Volume} = \iiint_{\text{solido}} 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{seal. asse } y}}{=} \int_0^1 dy \, \text{Area}(S_y)$$

corona circolare con raggio esterno 1 e raggio interno $\sqrt{y}$

$$= \pi \int_0^1 (1-y) \frac{3}{4} dy = \text{si fa.}$$



Se voglio la coordinata y del baricentro devo calcolare

$$\iiint_{\text{solido}} y \, dx \, dy \, dz = \dots = \frac{3}{4} \pi \int_0^1 (1-y)y \, dy$$

Se voglio la coordinata x devo calcolare

$$\iiint_{\text{solido}} x \, dx \, dy \, dz$$

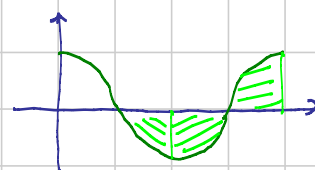
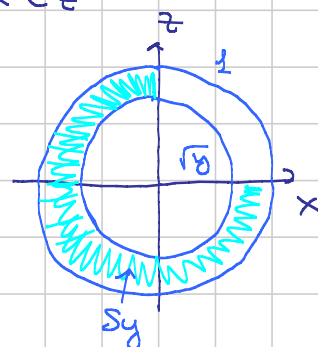
Qui servono coord. cilindriche nelle variabili x e z

$$= \int_0^1 dy \iint_{S_y} x \, dx \, dz$$

$$= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 dp \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \underbrace{p \cos \theta}_x \cdot \underbrace{p}_y \, d\theta$$

$$= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 p^2 \, dp \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos \theta \, d\theta}_{-1}$$

$$= - \int_0^1 dy \left[\frac{1}{3} p^3 \right]_{p=\sqrt{y}}^{p=1} = -\frac{1}{3} \int_0^1 (1-y)^{3/2} \, dy = \text{si fa}$$



Se voglio la coordinata z devo mettere $\sin \theta$ invece di $\cos \theta$.

Come posso parametrizzare la superficie descritta dalla rotazione della parabola?

→ La parabola è $(\underbrace{t}_x, \underbrace{t^2}_y)$ con $t \in [0, 1]$

→ La sup. diventa $(t \cos \theta, t^2, t \sin \theta)$
con $t \in [0, 1]$ e $\theta \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$.

Per esercizio calcolare $(\underbrace{t^2}_1 + \underbrace{t^2}_2 + \underbrace{t^2}_3)^{1/2} = t \sqrt{1+4t^2}$.

ANALISI 2

[Lock Down Edition]

LEZIONE 48

Note Title

26/04/2020

GRADIENTE, DIVERGENZA, LAPLACIANO, ROTORE (AM2-14 - Lez 46)

$$f(x, y, z) \quad \vec{E}(x, y, z) = (A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z))$$

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z)$$

$$\operatorname{div} \vec{E}(x, y, z) = A_x + B_y + C_z$$

$$\Delta f(x, y, z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(x, y, z) = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

Proprietà base di composizione

$$\textcircled{1} \operatorname{rot}(\nabla f) = 0$$

$$\operatorname{rot}(f_x, f_y, f_z) = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = \vec{0}$$

Vale il viceversa se la zona di definizione è sempl. connessa
(ad esempio stellata)

$$\operatorname{rot}(A, B, C) = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} C_y &= B_z \\ A_z &= C_x \\ B_x &= A_y \end{aligned} \Leftrightarrow \text{La forma diff.} \\ \omega = A dx + B dy + C dz \\ \text{è chiusa}$$

$$\textcircled{2} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E}) = 0$$

$$\operatorname{div}(C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$= \cancel{C_{yx}} - \cancel{B_{zx}} + \cancel{A_{zy}} - \cancel{C_{xy}} + \cancel{B_{xz}} - \cancel{A_{yz}} = 0$$

Meno facile (fatto misterioso): vale il viceversa se la zona di definizione è stellata.

Quindi: in un insieme dello spazio stellato (ad esempio tutto $\mathbb{R}^3$ o un semispazio) un vettore a divergenza nulla è il rotore di qualcosa.

$$\textcircled{3} \operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$$

$$\operatorname{div}(f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$$

$$\textcircled{4} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \nabla(\operatorname{div} \vec{E}) - (\Delta A, \Delta B, \Delta C)$$

" $\sim \Delta(\vec{E})$

$$\operatorname{rot}(C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$= ((B_x - A_y)_y - (A_z - C_x)_z, (C_y - B_z)_z - (B_x - A_y)_x, (A_z - C_x)_x - (C_y - B_z)_y)$$

$$= (B_{xy} - \cancel{A_{yy}} - \cancel{A_{zz}} + C_{xz}, C_{yz} - B_{zz} - B_{xx} + A_{yx}, A_{zx} - C_{xx} - C_{yy} + B_{zy})$$

+ $A_{xx} - \cancel{A_{xx}}$ + $B_{yy} - B_{yy}$ + $C_{zz} - C_{zz}$

$$= (-\Delta A + (\operatorname{div} \vec{E})_x, -\Delta B + (\operatorname{div} \vec{E})_y, -\Delta C + (\operatorname{div} \vec{E})_z)$$

$$B_{xy} + C_{xz} + A_{xx} = (A_x + B_y + C_z)_x = (\operatorname{div} \vec{E})_x$$

$$= -(\Delta A, \Delta B, \Delta C) + \nabla(\operatorname{div} \vec{E})$$

Esercizi vari

funzione scalare

$$\boxed{1} \text{ Calcolare } \operatorname{div} (\overset{\uparrow \text{funzione scalare}}{f} \overset{\uparrow \text{vettore}}{\vec{E}}) = f \operatorname{div} \vec{E} + \langle \nabla f, \vec{E} \rangle$$

$$\vec{E} = (A, B, C)$$

$$\operatorname{div} (fA, fB, fC) = (fA)_x + (fB)_y + (fC)_z$$

$$= f_x A + f A_x + f_y B + f B_y + f_z C + f C_z$$

$$= \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + f \operatorname{div} \vec{E}$$

$$\boxed{2} \text{ Calcolare } \operatorname{rot} (f \vec{E}) = f \operatorname{rot} (\vec{E}) + \nabla f \wedge \vec{E} \quad \uparrow \text{prodotto vettore}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y) = \operatorname{rot} (A, B, C)$$

$$\operatorname{rot} (fA, fB, fC) =$$

$$= ((fC)_y - (fB)_z, (fA)_z - (fC)_x, (fB)_x - (fA)_y)$$

$$= (f_y C + f C_y - f_z B - f B_z, f_z A + f A_z - f_x C - f C_x, f_x B + f B_x - f_y A - f A_y)$$

$$= f \operatorname{rot} \vec{E} + \underbrace{(f_y C - f_z B, f_z A - f_x C, f_x B - f_y A)}$$

chi è questo? È il vettore prodotto dalla formula misteriosa a partire da ∇f e $\vec{E}$ e questo per i fisici è il prodotto vettore

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ f_x & f_y & f_z \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

$$\boxed{3} \quad \Delta(fg) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle$$

$$\Delta(fg) = (fg)_{xx} + (fg)_{yy} + (fg)_{zz}$$

$$= (f_x g + f g_x)_x + (f_y g + f g_y)_y + (f_z g + f g_z)_z$$

$$= f_{xx} g + 2f_x g_x + f g_{xx} +$$

$$f_{yy} g + 2f_y g_y + f g_{yy}$$

$$f_{zz} g + 2f_z g_z + f g_{zz}$$

$\boxed{4}$ Osserviamo che certe composizioni non hanno senso, ad esempio

$$\nabla \vec{E}, \quad \Delta \vec{E}, \quad \operatorname{div} f, \quad \operatorname{rot} f, \quad \operatorname{rot}(\operatorname{div} \vec{E})$$

vedendo si interpreta

$$\quad \quad \quad \nabla(\operatorname{rot} \vec{E}), \quad \operatorname{div}(\Delta f), \dots$$

INVERSIONE DEL ROTORE Dato $\vec{E}$ con $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, trovare $\vec{F}$ tale che $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{E}$

Esempio $\vec{E} = (x + y^2, y + zx, -2z + x^2)$

Vediamo che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ ($1+1-2=0$), quindi $\vec{F}$ esiste dal momento che $\mathbb{R}^3$ è stellato.

Cerco A, B, C tali che (Pensando che $\vec{F} = (A, B, C)$)

$$\begin{cases} C_y - B_z = x + y^2 \\ A_z - C_x = y + zx \\ B_x - A_y = -2z + x^2 \end{cases}$$

Primo passo: posso supporre che una componente a scelta sia 0.

Diciamo che poniamo $B \equiv 0$

Il sistema diventa

$$C_y = x + y^2 \quad \leadsto \quad C = xy + \frac{1}{3}y^3 + \psi(x, z)$$

$$A_z - C_x = y + zx$$

$$-A_y = -2z + x^2 \quad \leadsto \quad A_y = 2z - x^2 \quad \leadsto \quad A = 2zy - x^2y + \phi(x, z)$$

Secondo passo: sostituisco A e C nella restante equazione:

$$A_z - C_x = \cancel{2y} - \phi_z - \cancel{y} - \psi_x = y + zx$$

DEVE SUCCEDERE che se ne vanno le y. Questo accade se il campo dato all'inizio (ora a dx nel sistema) ha $\text{div} = 0$

Quindi abbiamo da risolvere $\phi_z + \psi_x = -zx$

Terzo passo: pongo uguale a 0 una delle due, ad esempio $\phi \equiv 0$

Resta

$$\psi_x = -zx \quad \leadsto \quad \psi = -\frac{1}{2}zx^2$$

Quindi una possibilità per il campo richiesto è

$$(2zy - x^2y, 0, xy + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}zx^2) \quad [\text{Verifica !!!}]$$

$$(C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y) = (x + y^2, 2y - y - zx, -2z + x^2)$$



Oss. Posso fare in modo che la seconda componente sia $\sin(xz) + \cos(y)$

OSSERVARE CHE
 $\uparrow \quad \text{rot}(\nabla f) = 0$

Sì!! Basta che aggiunga alla risposta precedente il ∇f che abbia come seconda componente quella data!! Quindi aggiungo

$$\nabla(y \sin(xz) + \sin y) = (yz \cos(xz), \sin(xz) + \cos y, yx \cos(xz))$$

$$\sim 0 \quad - \quad 0 \quad - \quad 0$$

ANALISI 2

[Lockdown Edition]

- LEZIONE 49

Note Title

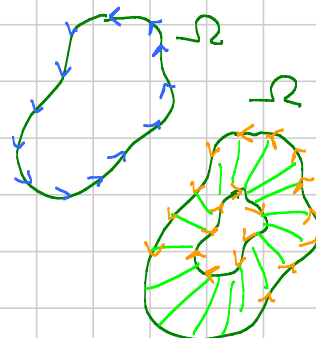
28/04/2020

Area di sottoinsiemi del piano descritti mediante il bordo

(Lec. 47-48 AM2-14)

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x dy = \int_{\gamma} -y dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x dy - y dx)$$

curva o un sistema di curve
che percorre $\partial\Omega$ lasciando
 Ω alla sua sinistra

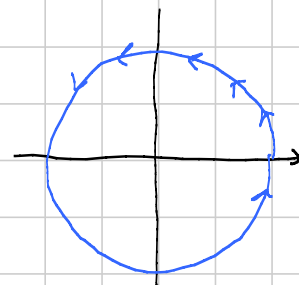


Si possono fare varianti più creative, tipo

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \int_{\gamma} \left(\frac{1}{3} x dy - \frac{2}{3} y dx \right) \\ &= \int_{\gamma} \frac{5}{4} x dy + \frac{1}{4} y dx \end{aligned}$$

Esempio 1 $(\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \int_{\gamma} x dy = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi \end{aligned}$$

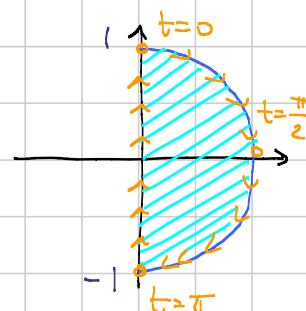


$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} \left(\frac{1}{2} x dy - \frac{1}{2} y dx \right) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \cos^2 t + \frac{1}{2} \sin^2 t \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 dt = \pi$$

Esempio 2 Semicerchio "destra" = Ω

Devo trovare una parametrizz. di $\partial\Omega$

$$\gamma_1(t) = (\sin t, \cos t) \quad t \in [0, \pi]$$



$$\gamma_2(t) = (0, t) \quad t \in [-1, 1]$$

$$\text{Area}(\Omega) = - \int_{\gamma_1} x \, dy - \int_{\gamma_2} x \, dy$$

(i segni - ci sono perché γ_1 e γ_2 vanno nel verso sbagliato)

$$= - \int_0^\pi \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{\sin t} (-\underset{\substack{\uparrow \\ y'(t)}}{\sin t}) \, dt - \int_{-1}^1 \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{0} \, dt = \int_0^\pi \sin^2 t \, dt = \frac{\pi}{2}$$

Potremmo usare la formula con $y \, dx$, questa volta con segno +

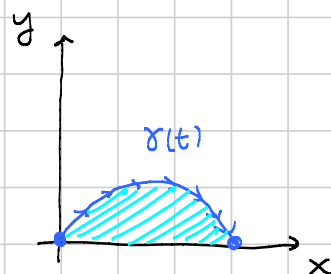
$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \int_{\gamma_1} y \, dx + \int_{\gamma_2} y \, dx = \int_0^\pi \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{\cos t} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x'(t)}}{\cos t} \, dt + \int_0^\pi \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{t} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x'(t)}}{0} \, dt \\ &= \int_0^\pi \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Esempio 3 Ω limitato dalla curva $\gamma(t) = (t^3, t(1-t))$ $t \in [0, 1]$ e dall'asse x

Osservazioni sulla curva

→ è semplice perché $x(t)$ è monot. ↑

→ $y(t) > 0$ per $t \in (0, 1)$



Serve una curva che percorra $\partial\Omega$ nel verso giusto, cioè prima il segmento $\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [0, 1]$ e poi $\gamma_2(t)$ in verso opposto

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma_1} x \, dy - \int_{\gamma_2} x \, dy = \int_0^1 t \cdot 0 \, dt - \int_0^1 t^3 (1-t) \, dt$$

mette a posto il verso

= si fa

oppure

$$\text{Area}(\Omega) = - \int_{\gamma_1} y \, dx + \int_{\gamma_2} y \, dx = \int_0^1 (t - t^2) 3t^2 \, dt$$

" su γ_1

sono lo stesso integr. Uno si ottiene dall'altro per punti!

Ulteriore alternativa: in questo caso il sostegno della curva si poteva esplicitare

$$x = t^3 \quad \leadsto \quad t = \sqrt[3]{x} \quad \leadsto \quad y = \sqrt[3]{x} (1 - \sqrt[3]{x})$$

$$y = t(1-t)$$

quindi potevo scrivere Ω come normale rispetto all'asse x

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt[3]{x} (1 - \sqrt[3]{x}) \}$$

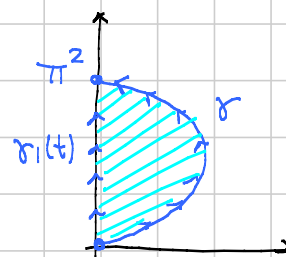
da cui
$$\text{Area}(\Omega) = \int_0^1 \sqrt[3]{x} (1 - \sqrt[3]{x}) dx$$

Ponendo $\sqrt[3]{x} = t$ diventa uno dei precedenti 😊

Esempio 4 Ω limitato da $(\sin t, t^2)$ con $t \in [0, \pi]$ e asse y

La curva è semplice perché $\gamma(t)$ è $\nearrow$ in $[0, \pi]$

$$\gamma_1(t) = (0, t) \quad \text{con } t \in [0, \pi^2]$$



$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x dy = \int_{\gamma_1} x dy - \int_0^0 x dy$$

$\uparrow$
 γ_1 ha il verso sbagliato

$$= \int_0^{\pi} \sin t \cdot 2t dt = \text{si fa con un passaggio per parti.}$$

Alternativa: Ω insieme è normale rispetto all'asse y e ha equazione

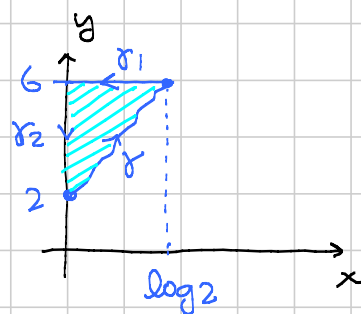
$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \pi^2, 0 \leq x \leq \sin \sqrt{y} \}$$

da cui
$$\text{Area}(\Omega) = \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{y}) dy$$

Ponendo $\sqrt{y} = t$ viene il precedente

Esempio 5 Ω limitato dalla curva $(\log t, t + t^2)$ con $t \in [1, 2]$
+ asse y + retta $y = 6$

La curva è semplice perché $x(t)$ e $y(t)$
sono $\nearrow$ in $[1, 2]$



$\gamma_1 = \{(t, 6) : t \in [0, \log 2]\}$ cambiata di verso
 $\gamma_2 = \{(0, t) : t \in [2, 6]\}$ cambiata di verso

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \int_{\gamma} x \, dy - \int_{\gamma_1} x \, dy - \int_{\gamma_2} x \, dy \\ &= \int_1^2 \log t (1+2t) \, dt = \text{si fa facile per parti} \end{aligned}$$

Alternativa 1: $\text{Area}(\Omega) = - \int_{\gamma} y \, dx + \int_{\gamma_1} y \, dx + \int_{\gamma_2} y \, dx$

$$= - \int_1^2 (t + t^2) \frac{1}{t} \, dt + \int_0^{\log 2} 6 \cdot 1 \, dt = 6 \log 2$$

$\uparrow$ $y(t)$ $\uparrow$ $\dot{x}(t)$

= ancora + facile [Verificare che venga lo stesso !!]

Alternativa 2: posso descrivere Ω come insieme normale risp. x :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \log 2, e^x + e^{2x} \leq y \leq 6\}$$

$$\text{Area}(\Omega) = \int_0^{\log 2} dx (6 - e^x - e^{2x}) = \text{si fa facilmente.}$$

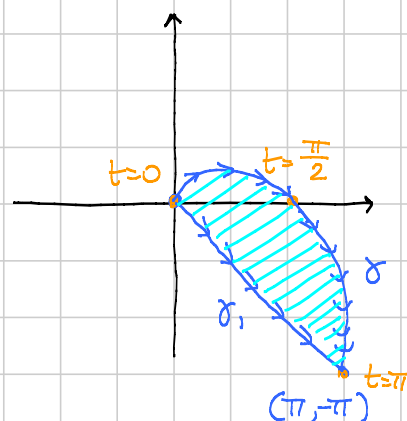
Esempio 6 Ω limitato dalla curva $(t + \sin t, t \cos t)$ con $t \in [0, \pi]$
e dalla retta $x + y = 0$

La curva è semplice perché $t + \sin t$ è ↗

Per $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ abbiamo $x(t) > 0$ e $y(t) > 0$

Per $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ abbiamo $x(t) > 0$ e $y(t) < 0$

Importante da dimostrare: La curva sta sempre sopra la retta



$$x(t) + y(t) \geq 0 \quad \begin{aligned} t + \sin t + t \cos t &\stackrel{?}{\geq} 0 \\ t \underbrace{(1 + \cos t)}_{\geq 0} + \underbrace{\sin t}_{\geq 0 \text{ per } t \in [0, \pi]} &\stackrel{?}{\geq} 0 \end{aligned}$$

vale il segno di = solo ai due estremi

Consideriamo $\sigma(t) = (t, -t)$ con $t \in [0, \pi]$. Allora

$$\text{Area}(\Omega) = - \int_{\sigma} x \, dy + \int_{\sigma_1} x \, dy =$$

↗
verso da
cambio

$$\begin{aligned} &= - \int_0^\pi (t + \sin t) (t \cos t)' \, dt + \int_0^\pi t (-1) \, dt \\ &= - \int_0^\pi (t + \sin t) (\cos t - t \sin t) \, dt = \text{si fa} \end{aligned}$$

↑
 $x(t)$ ↑
 $y(t)$

In alternativa: $\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} y \, dx - \int_{\sigma_1} y \, dx$

$$= \int_0^\pi t \cos t (1 + \cos t) \, dt - \int_0^\pi (-t) \, dt = \text{si fa}$$

oppure $\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} \frac{1}{2} y \, dx - \frac{1}{2} x \, dy + \int_{\sigma_1} \frac{1}{2} x \, dy - \frac{1}{2} y \, dx$

$t(-1)$ $(-t)1$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi (-t \cos t + t^2 \sin t - \sin t \cos t + \boxed{t \sin^2 t} + t \cos t + \boxed{t \cos^2 t}) \, dt = \text{si fa}$$

— 0 — 0 — → t ← 0

ANALISI 2

- LEZIONE 50

[Lockdown Edition]

Note Title

28/04/2020

Calcolo del flusso uscente da un insieme Ω del piano o dello spazio

Ingredienti : $\rightarrow$ insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ o $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$
 $\rightarrow$ un vettore $\vec{E}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$
oppure $\vec{E}(x,y,z) = (A(x,y,z), B(\dots), C(\dots))$

Calcolare $\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$ $\rightarrow$ integr. curvilineo nel piano
 $\uparrow$
VERSORE
normale esterno
 $\rightarrow$ " superf. nello spazio

Nel piano : $\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma} A dy - B dx$
 $\uparrow$
sistema di curve che percorre
 $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra

Nello spazio : $\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_G (A M_1 + B M_2 + C M_3) du dv$

dove $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione di $\partial\Omega$ che fornisce il vettore normale con la giusta orientazione.

Si intende che $\Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$ e

$A M_1 \rightsquigarrow A(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) M_1(u,v) \dots$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega^+} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

IDEA IN 3
VARIABILI

Esempio 1 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\vec{E}(x,y) = (x,y)$

Dal disegno l'integrale sarà per forza positivo

1° modo Uso la formula

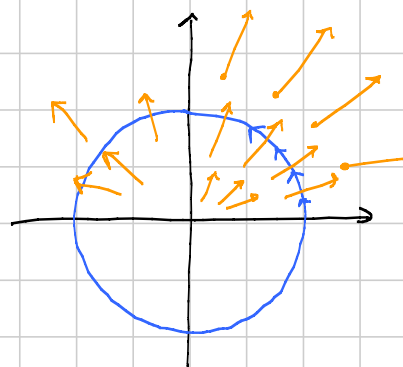
$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma} A dy - B dx$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

$$= \int_{\gamma} x dy - y dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi$$

2° modo Teorema della divergenza:

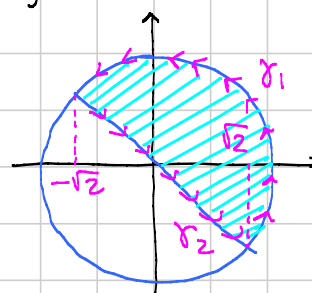
$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \iint_{\Omega} 2 dx dy = 2 \operatorname{Area}(\Omega) = 2\pi$$



Esempio 2 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x+y > 0\}$

$$\vec{E}(x,y) = (x^2 y, x+y)$$

1° modo $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$
 $\gamma_2(t) = (t, -t)$ con $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$



$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} x^2 y dy - (x+y) dx$$

[Dopo video: ovviamente $\gamma_1(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, il che cambia i conti successivi]

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\underbrace{\cos^3 t \sin t}_{x^2 y} \cdot \underbrace{\cos t}_{\dot{y}} - \underbrace{(\cos t + \sin t)}_{x+y} \underbrace{(-\sin t)}_{\dot{x}} \right] dt$$

$$+ \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} t^2 (-t) (-1) - 0 = \text{si fanno } (= \text{FARLI !!})$$

2° modo Via teo. divergenza

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \iint_{\Omega} (2xy+1) dx dy \\ &= \operatorname{Area}(\Omega) + 2 \iint_{\Omega} xy dx dy \\ &= 2\pi + 2 \int_0^2 dp \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \quad p \cos \theta \quad p \sin \theta \quad p \end{aligned}$$

Esempio 3 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq \pi\}$

$$\vec{E} = (y \cos x, x^3 + \sin y)$$



1° modo

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \text{ con } t \in [0, \pi]$$

$$\gamma_2(t) = (\pi, t) \text{ con } t \in [0, \pi]$$

$$\gamma_3(t) = (t, t) \text{ con } t \in [0, \pi] \text{ e verso al contrario}$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup (-\gamma_3)} y \cos x dy - (x^3 + \sin y) dx$$

$$\int_{\gamma_1} \dots = \int_0^\pi (0 - t^3) dt$$

$$\int_{\gamma_2} \dots = \int_0^\pi [-t - (\pi^3 + \sin t) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{0}] dt$$

$$\int_{-\gamma_3} \dots = - \int_0^\pi [t \cos t \cdot 1 - (t^3 + \sin t) \cdot 1] dt$$

si fanno

2° modo

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \iint_{\Omega} (-y \sin x + \cos y) dx dy$$

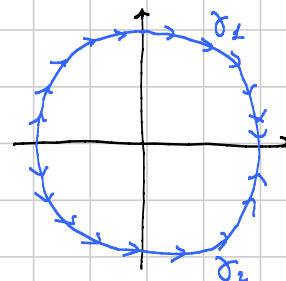
$$= \int_0^\pi dx \int_0^x dy (-y \sin x + \cos y) = \text{si fa}$$

Esempio 4 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$ $\vec{E} = (x^2y, x^{10})$

1° modo Dovrei parametrizzare $\partial\Omega$, il che è spiacevole, perché vengono delle radici

$$\sigma_1(t) = (t, \sqrt[4]{1-t^4}) \text{ con } t \in [-1, 1]$$

$$\sigma_2(t) = (t, -\sqrt[4]{1-t^4}) \text{ con } t \in [-1, 1]$$



$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\sigma_2} (x^2y dy - x^{10} dx) - \int_{\sigma_1} (x^2y dy - x^{10} dx) = \text{auguri!}$$

verso sbagliato



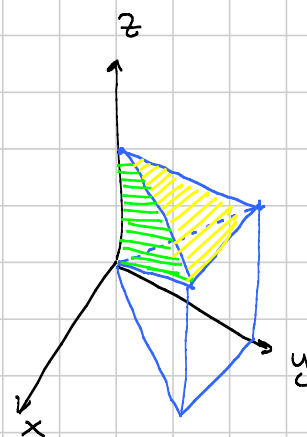
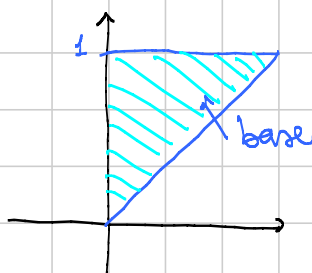
2° modo $\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy$

$$= \iint_{\Omega} 2xy dx dy = 0 \text{ per simmetria}$$

Esempio 5 $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$

base colonna

$$\vec{E} = (x^2, y^2, z^2)$$



Fissato $(x,y) \in \text{base}$, abbiamo $y \leq z \leq 1$

$\partial\Omega$ è costituito da 3 triangoli, quindi parametrizzarlo è per lo meno lungo (ma un esercizio istruttivo :))

In alternativa uso teo. divergenza

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx dy dz = \iiint_{\Omega} (2x+2y+2z) \, dx dy dz \\ &= \int_0^1 dy \int_0^y dx \int_y^1 dz (2x+2y+2z) \end{aligned}$$

Esempio 6 $\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2+y^2 \leq 2 \}$

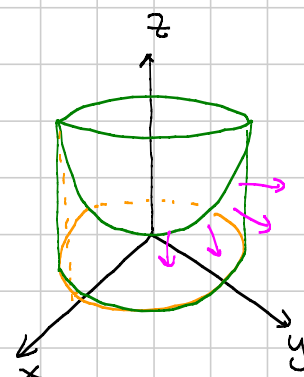
$$\vec{E} = (z + \sin y, x y z, 1)$$

Ω = p.ti che stanno nel cilindro, ma sotto il paraboloide, quindi il suo bordo è costituito da 3 pezzi

$S_1 \rightarrow$ il cerchio base : $x^2+y^2 \leq 2, z=0$

$S_2 \rightarrow$ la superficie "laterale" : $x^2+y^2=2, z \in [0,2]$

$S_3 \rightarrow$ la superficie "interna" del paraboloide : $z = x^2+y^2 : x^2+y^2 \leq 2$



Via teorema della div : $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx dy dz = \iiint_{\Omega} xz \, dx dy dz = 0$
per simmetria su x

Per esercizio calcoliamo il contributo di S_1

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{S_1} -1 d\sigma = -\operatorname{Area}(S_1) = -2\pi$$

$\uparrow$
(0,0,-1)

Il contributo di S_2 : $S_2 = (\cos\theta, \sin\theta, z) \quad \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 2]$

Dovrei calcolare M_1, M_2, M_3

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

ha il vettore uscente giusto

giusto che sia piano xy

$$\begin{aligned}
 \int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dz \left\{ (z + \sin(\sin\theta)) \cos\theta \right. && A.M_1 \\
 &\quad + \cos\theta \sin\theta z \cdot \sin\theta && B.M_2 \\
 &\quad \left. + 0 \right\} && C.M_3 \\
 &= \text{si fa.}
 \end{aligned}$$

Per l'integrale su S_3 la parametrizzazione sarebbe

$(u, v, u^2 + v^2)$ con $(u, v) \in$ cerchio di centro $(0,0)$
e raggio $\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-2u, -2v, 1)$$

↑ punta verso la z
positive, e quindi è giusto

$$\begin{aligned}
 \int_{S_3} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \iint_{u^2+v^2 \leq 2} \left\{ (u^2+v^2 + \sin v) (-2u) \right. && A.M_1 \\
 &\quad + uv(u^2+v^2) (-2v) && B.M_2 \\
 &\quad \left. + 1 \cdot 1 \right\} && C.M_3
 \end{aligned}$$

= si fa, e con la simmetrie anche bene.

Controllare che la somma venga 0 !!!!
— 0 — 0 —

ANALISI 2

[Lock Down Edition]

LEZIONE 51

Note Title

04/05/2020

Integrale di funzioni su insiemi descritti mediante il bordo

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

↑ descritto mediante
il bordo

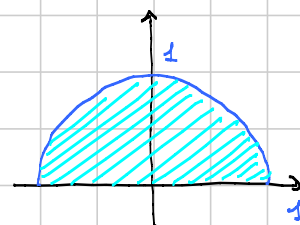
Strumento: teo. della divergenza

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma} A dy - B dx$$

$\vec{E} = (A, B)$ normale esterna a $\partial\Omega$ sistema di curve che percorrono $\partial\Omega$ lasciando Ω a sx

Esempio 1 Ω limitato da $(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$
e retta $y = 0$

$$f(x, y) = y$$



1° modo Classico in coord. polari

$$\int_0^1 dp \int_0^\pi d\theta \, p \sin \theta \cdot p = \underbrace{\int_0^1 p^2 dp}_{\frac{1}{3}} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2 = \frac{2}{3}$$

2° modo Classico in coord. cartesiane normale asse x

$$\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \int_0^1 (1-x^2) dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

↑ funzione
PARI

3° modo Classico normale asse y:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y dx = \int_0^1 2y \sqrt{1-y^2} dy = \left[-\frac{2}{3} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}$$

4° modo Teorema della divergenza. Scelgo $\vec{E}$ t.c. $\text{div } \vec{E} = y$.

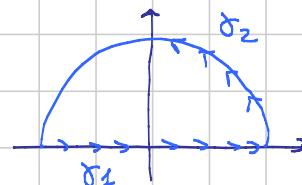
Ad esempio

$$\vec{E}(x, y) = (xy, 0)$$

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} = \int_{\gamma} xy \, dy \quad \text{devo solo scegliere } \gamma$$

$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad \text{con } t \in [-1, 1]$$

$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{con } t \in [0, \pi]$$



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} xy \, dx &= \int_{\gamma_1} \dots + \int_{\gamma_2} \dots = \int_{-1}^1 \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{t} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{0} \cdot dt + \int_0^{\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{\cos t} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{\sin t} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y'(t)}}{\cos t} dt \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2 t \cdot \sin t \, dt = \left[-\frac{1}{3} \cos^3 t \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

5° modo Ancora teorema della divergenza, ma $\vec{E} = (0, \frac{1}{2}y^2)$

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy = \int_{\gamma} -\frac{1}{2} y^2 \, dx = -\frac{1}{2} \int_{\gamma_1} y^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\gamma_2} y^2 \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{0} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x'(t)}}{1} \, dt - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 t \, (-\sin t) \, dt$$

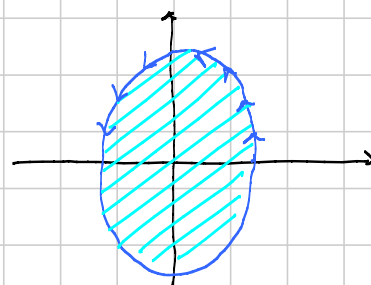
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^3 t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin t (1 - \cos^2 t) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\sin t - \cos^2 t \sin t) \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \quad \text{😊}$$

Esempio 2 Ω limitato da $(\cos t, 2 \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
Voglio integrare xy

1° modo Cerco $\vec{E}$ con $\text{div } \vec{E} = xy$

$$\vec{E} = \left(\frac{1}{2} x^2 y, 0 \right)$$



$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy = \int_{\gamma} \overset{A}{\frac{1}{2}} x^2 y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)^2}}{\cos^2 t} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{2 \sin t} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{y}(t)}}{2 \cos t} \, dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \cos^3 t \cdot \sin t \, dt = \left[-\frac{1}{2} \cos^4 t \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

↑
verifica!

2° modo Idem con $\vec{E} = (0, \frac{1}{2} x y^2)$

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy = - \int_{\gamma} \underset{-B \, dx}{\frac{1}{2} x y^2} \, dx = - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos t \cdot 4 \sin^2 t \cdot (-\sin t) \, dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot \cos t \, dt = \left[\frac{1}{2} \sin^4 t \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0 - 0 = 0.$$

3° modo Osservo che Ω insieme e l'ellisse di equazione

$$4x^2 + y^2 \leq 4$$

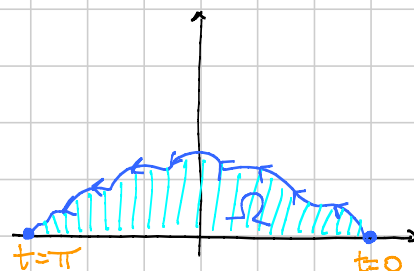
e quindi l'integrale di y si annulla per simmetria.

Esempio 3 Ω limitato da $(\cos t, t(\pi-t)) \quad t \in [0, \pi]$
e dall'asse x . $\uparrow x(t) \quad \uparrow y(t)$

Vogliamo integrare x

Come è fatta la curva? $\gamma_1(0) = (1, 0)$
 $\gamma_1(\pi) = (-1, 0)$
 $y(t) > 0$ per $t \in (0, \pi)$

Inoltre $x(t)$ è monotona decrescente,
quindi la curva è semplice.



Cerco $\vec{E}$ con $\text{div } \vec{E} = x$. Ad esempio $\vec{E}_1 = (\frac{1}{2}x^2, 0)$
oppure $\vec{E}_2 = (0, xy)$

Cerco σ che percorra $\partial\Omega$ nel verso giusto. Posso usare σ_1 seguita da $\sigma_2(t) = (t, 0)$ con $t \in [-\pi, \pi]$

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E}_1 \, dx \, dy = \int_{\sigma_1} \frac{1}{2} x^2 \, dy + \int_{\sigma_2} \frac{1}{2} x^2 \, dy$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cos^2 t (\pi - 2t) \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} t^2 (\pi - 2t) \, dt = \text{si fa}$$

[Aggiunto dopo video: qui si sta usando σ_2 , quindi verrebbe 0 :)]

oppure con E_2 :

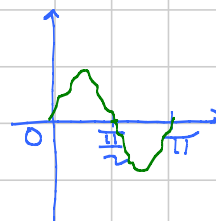
$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E}_2 \, dx \, dy = - \int_{\sigma_1} xy \, dx - \int_{\sigma_2} xy \, dx$$

$$= - \int_0^{\pi} \underbrace{\cos t}_{x(t)} \underbrace{t}_{y(t)} (\pi - t) \underbrace{(-\sin t)}_{\dot{x}(t)} \, dt - \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos t}_{x(t)} \cdot 0 \, dt$$

[Aggiunto dopo video: si sta usando σ_2 , quindi sarebbe $t \cdot 0 \cdot 1 \, dt$]

↓ volendo si fa, o ancora meglio si osserva che l'integranda è "dispari rispetto a $\frac{\pi}{2}$ ", cioè detta $f(t)$ la funzione che vogliamo integrare, vale che

$$f\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$- \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \left(\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

I due centrali sono uguali, quindi ci si riduce a

$$\underbrace{-\sin \alpha}_{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)} \underbrace{\cos \alpha}_{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \text{ok.}$$

Esempio 4 Ω limitato dalla curva $\gamma(t) = (\sin t, \cos^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$
 Vogliamo integrare x^2

Scegliendo $\vec{E} = (\frac{1}{3}x^3, 0)$ viene

$$\iint_{\Omega} x^2 dx dy = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy$$

$$= \int_{\gamma} \frac{1}{3} x^3 dy$$

↑
 curva data cambiata
 di verso in modo da
 lasciare Ω a sx

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \sin^4 t dt = \text{con un po' di fatica si fa}$$

Scegliendo $\vec{E} = (0, x^2 y)$ diventa

$$-\int_{\gamma} x^2 y dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^3 t \cdot \cos t dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot \cos^4 t dt$$

↑
 cambio
 verso

= non è difficile vedere che è
 analogo al precedente.

Se volessi equazione di Ω verrebbe

$$x^2 + |y|^{\frac{2}{3}} \leq 1$$

e quindi con molta buona volontà potrei fare in coord. cartesiane

$$\iint_{\Omega} x^2 dx dy = 4 \iint_{\substack{\text{parte nel} \\ 1^o \text{ quadrante}}} x^2 dx dy = 4 \int_0^1 dx \int_0^{(1-x^2)^{3/2}} dy x^2$$

$$= 4 \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{3/2} dx = \text{si fa}$$

$x = \sin t$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

[Lock Down Edition]

LEZIONE 52

Note Title

04/05/2020

Esempio 1 Curva $\gamma(t) = (t(1-t), t^2(1-t))$ con $t \in [0, 1]$

Dimostrare che γ è chiusa e semplice e integrare y sull'insieme Ω di cui è bordo

Chiusura: $\gamma(0) = (0, 0)$ $\gamma(1) = (0, 0)$ ok

Semplicità:

1° modo Imposto il sistema

$$\begin{cases} t(1-t) = s(1-s) \\ t^2(1-t) = s^2(1-s) \end{cases} \quad \begin{cases} t-t^2 = s-s^2 \\ t^2-t^3 = s^2-s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} t-s = (t+s)(t-s) \\ t^2-s^2 = t^3-s^3 \end{cases}$$

Dalla 1ª equazione abbiamo 2 possibilità

- $t=s$, e allora siamo contenti
- semplifico $t-s$ e resta $t+s=1$

La 2ª equazione si scrive come $(\cancel{t-s})(t+s) = (\cancel{t-s})(t^2+ts+s^2)$
 $\uparrow$ nel caso $t \neq s$ semplifico

Sostituendo $s=1-t$ diventa

$$\begin{aligned} 1 &= t^2 + t(1-t) + (1-t)^2 \leadsto \cancel{1} = \cancel{t^2} + t - \cancel{t^2} + \cancel{1} + t^2 - 2t \\ \leadsto t^2 &= t \quad \leadsto t(t-1) = 0 \quad \rightarrow \begin{matrix} t=0 \leadsto s=1 \\ t=1 \leadsto s=0 \end{matrix} \quad \text{estremi} \end{aligned}$$

Quindi la curva è semplice.

Modo alternativo di risolvere il sistema: brutalmente se divido la 2ª equazione per la prima ottengo $t=s$ direttamente.

Ma posso dividere? Se e solo se $t(1-t) \neq 0$. Quindi restano da fare a mano i casi $t=0$ e $t=1$ che conducono comunque agli estremi.

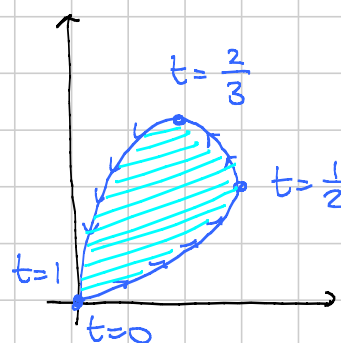
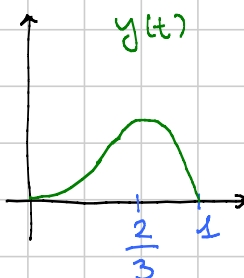
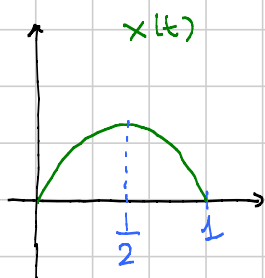
2° modo Consideriamo $f(x, y) = \frac{y}{x}$. Allora
 $f(x(t), y(t)) = t$, che è monotono in $[0, 1]$.

Occhio però che si può dividere solo quando $x(t) \neq 0$, quindi occorre(rebbe) considerare a parte i casi $t=0$ e $t=1$ e vedere che questo porta ad avere pure $s=0$ e $s=1$.

Oss. Se una curva è chiusa, allora non può esserci una $f(x,y)$ definita ovunque tale che $f(x(t), y(t))$ sia monotona.

Disegno della curva

$$\gamma(t) = (t - t^2, t^2 - t^3)$$



- Per $t \in [0, \frac{1}{2}]$ si ha $x(t) \nearrow$ e $y(t) \nearrow$
- Per $t \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ si ha $x(t) \searrow$ e $y(t) \nearrow$
- Per $t \in [\frac{2}{3}, 1]$ si ha $x(t) \searrow$ e $y(t) \searrow$ (questo non basta per la semplicità, vedi VIDEO)

Integro y (verrà > 0) scegliendo $\vec{E} = (xy, 0)$ opp. $(0, \frac{1}{2}y^2)$

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy = \int_{\gamma} xy \, dy = \int_0^1 \underbrace{t(1-t)}_{x(t)} \underbrace{t^2(1-t)}_{y(t)} \underbrace{(2t-3t^2)}_{y'(t)} dt = \text{si fa}$$

Esempio 2 Ω limitato dalla superficie

$$(\sin t, \cos t, v^2) : (t, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$$

e dai piani $z=0$ e $z=1$

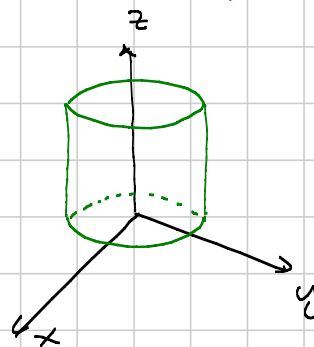
$$\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$$

Il supporto della superficie è la sup. laterale di un cilindro. Fissato v , la param. descrive una circ. con centro nell'origine, raggio 1, e terza coord = v^2 , che quindi varia tra 0 e 1 (non cambiava nulla se invece di v^2 c'era v oppure v^3 oppure v^{33}).

1° modo Per sezioni o per colonne.

Ad esempio

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dz \cdot z \cdot \text{Area}(S_z) \\ &= \pi \int_0^1 z \, dz = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



2° modo Teorema della divergenza cercando E con $\text{div } E = z$,
ad esempio $E = (0, 0, \frac{1}{2}z^2)$

$$\iiint_{\Omega} \text{div } E \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Il bordo è l'unione di 3 pezzi

- il cerchio sotto con normale $(0, 0, -1)$
- il cerchio sopra con normale $(0, 0, 1)$
- la sup. laterale, di cui calcolo la normale con la formula

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (2v \cos t, 2v \sin t, 0)$$

↑
grande notizia perché
 $\cos t \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = 0$ su
questo pezzo

Una piccola verifica, ad esempio
quando siamo nel 1° quadrante
nelle variabili x e y , ci dice che la normale è uscente

Non resta che calcolare l'integrale sulle due basi

$$\int_{\text{Base sotto}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = 0 \quad \because$$

$\uparrow$
= 0 nella base sotto

$$\begin{aligned} \int_{\text{Base sopra}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_{\text{Base sopra}} \langle (0, 0, \frac{1}{2}), (0, 0, 1) \rangle d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \text{Area (Base sopra)} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

3° modo Teorema della divergenza con scelta $E = (xz, 0, 0)$
Ancora una volta devo fare

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \text{somma di 3 pezzi}$$

Osserviamo che $\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = 0$ nelle basi sopra e sotto ($\vec{E}$ ha solo 1ª componente, $\vec{n}$ ha solo la 3ª).

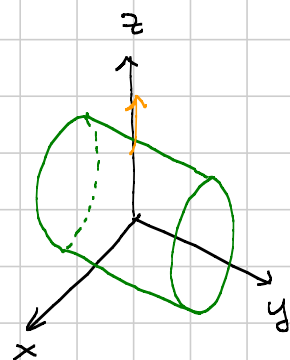
Quindi resta solo la sup. laterale del cilindro dove

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle &= \langle (xz, 0, 0), (2v \cos t, 2v \sin t, 0) \rangle \\ &= \langle (\cos t \cdot v^2, 0, 0), (2v \cos t, 2v \sin t, 0) \rangle \\ &= 2v^3 \cos^2 t \end{aligned}$$

$$\text{Quindi resta} \quad \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 dv \, 2v^3 \cos^2 t = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt}_{\pi} \underbrace{\int_0^1 2v^3 \, dv}_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Esempio 3 Ω limitato da $(\sin t, \cos v, \cos^3 t)$: $(t, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$
e dai piani $y=1$ e $y=-1$.
Supponiamo di integrare y^2

L'insieme è una specie di cilindro lungo
asse y : il termine $\cos v$ va da -1 a 1 e
fissato v resta $(\sin t, \cos^3 t)$ che è una specie
di circonf. in (x, z)



1° modo Teo divergenza con $E = (0, \frac{1}{3}y^3, 0)$

Calcoliamo la normale della sup. laterale:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \cos t & 0 & 3\cos^2 t \sin t \\ 0 & -\sin t & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (3\cos^2 t \sin t \sin \sigma, 0, -\cos t \sin \sigma)$$

$\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = 0$ sulla sup. laterale

Per vedere se il verso è corretto, prendiamo

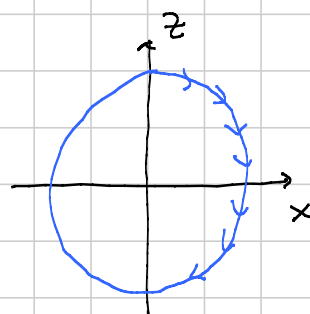
$t=0$ e $\sigma = \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow (0, 0, -1)$ va cambiata di segno perché in $(0, 0, 1)$ dove puntare verso l'alto

e il punto corrispondente è $(0, 0, 1)$

In realtà in questo caso

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_{\text{Base } y=1} \dots + \int_{\text{Base } y=-1} \dots \\ &= \int_{\text{Base } y=-1} \langle (0, -\frac{1}{3}, 0), (0, -1, 0) \rangle + \int_{\text{Base } y=1} \langle (0, \frac{1}{3}, 0), (0, 1, 0) \rangle \\ &= \frac{2}{3} \text{Area (Base)} \\ &\quad \text{"si fa con teo. della divergenza nel piano"} \\ &= \frac{2}{3} \int_{\partial\text{Base}} x dz = \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} dt \sin t \cdot 3\cos^2 t (-\sin t) dt \end{aligned}$$

La curva $(\sin t, \cos^3 t)$ gira nel verso sbagliato, quindi occorre cambiare segno.



2° modo Scelgo $E = (0, 0, y^2 z)$. Così le 2 basi non contribuiscono, e sulla sup laterale resta

$\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = y^2 z \cos t \sin \sigma = \cos^2 \sigma \cos^3 t \cos t \sin \sigma$ e quindi resta da fare

cambio segno alla normale di sopra

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^{\pi} d\sigma \cos^4 t \cdot \cos^2 \sigma \sin \sigma$$

— 0 — 0 — [Controllare vengono uguali!]

ANALISI 2

[Lock Down Edition]

LEZIONE 53

Note Title

04/05/2020

Quattro strategie per il calcolo di un flusso

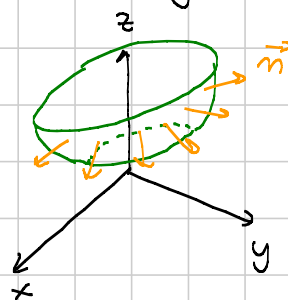
Ingredienti: $\rightarrow$ una superficie S
 $\rightarrow$ una scelta del vettore normale $\vec{n}$
 $\rightarrow$ un campo vettoriale $\vec{E}$

Obiettivo: calcolare

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Flusso di $\vec{E}$ attraverso S
 nella direzione $\vec{n}$

Esempio $\rightarrow$ prendiamo $S =$ la parte di grafico di $z = x^2 + 2y^2$
 compresa tra $z = 1$ e $z = 4$
 $\rightarrow$ come $\vec{n}$ consideriamo il verso
 "uscite" dall'asse z
 $\rightarrow$ consideriamo
 $\vec{E} = (x + yz, -2y, z + x^2)$



Vogliamo calcolare il flusso.

Ci sono almeno 4 modi:

- 1 - Uso la definizione
- 2 - Teo della divergenza
- 3 - Stokes con inversione del rotore
- 4 - Stokes con cambio superficie senza inversione del rotore.

1° modo

$\rightarrow$ Parametrizzo la sup.
 $\rightarrow$ Calcolo $\vec{n}$ con la formula e controllo che sia
 quella con il verso giusto
 $\rightarrow$ Concludo con la definizione

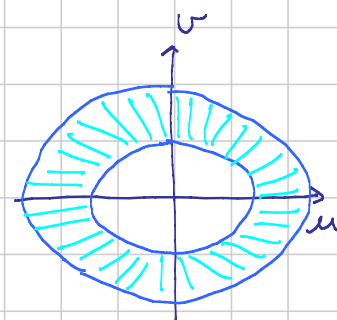
Nel vostro caso una parametrizzazione è $(u, v, u^2 + 2v^2)$
con

$$(u, v) \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base}}}{\Omega} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u^2 + 2v^2 \leq 4\}$$

Calcolo del normale

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 4v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-2u, -4v, 1)$$

$\uparrow$ punta verso l'alto, quindi
devo cambiare il verso



$$\vec{n} = (2u, 4v, -1)$$

Uso della formula

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{\Omega} (A M_1 + B M_2 + C M_3) du dv$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\underbrace{(u + v(u^2 + 2v^2))}_{x+yz} \underbrace{2u}_{M_1} - \underbrace{2v}_{-2y} \underbrace{(4v)}_{M_2} + \underbrace{(2u^2 + 2v^2)}_{z+x^2} \underbrace{(-1)}_{M_3} \right] du dv$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\cancel{2u^2} + \underbrace{2uv(u^2 + 2v^2)}_{\substack{\downarrow \text{verrà 0 per simmetria}}} - 8v^2 - \cancel{2u^2} - 2v^2 \right] du dv = \text{si fa}$$

$$= -10 \iint_{\Omega} v^2 du dv \quad (\text{con un cambio di variabili } \Omega \text{ diventa una corona circolare})$$

Oss. Considerando $z = x^2 + 2y^2$ con $1 \leq z \leq 4$ possiamo parametrizzare come

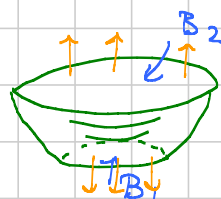
$$\left(\sqrt{v} \cos \theta, \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2}} \sin \theta, v \right) : (\theta, v) \in [0, 2\pi] \times [1, 4]$$

[Provare a rifare i conti con questa nuova parametrizz.]

2° modo

→ Aggiungo i "tappi"

→ Uso teorema della divergenza sul solido che viene fuori



Considero il solido Ω ottenuto aggiungendo le due basi. Allora

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_S \dots + \int_{B_1} \dots + \int_{B_2} \dots$$

quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz - \int_{B_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma - \int_{B_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$$\vec{E} = (x+yz, -zy, z+x^2) \leadsto \operatorname{div} \vec{E} = 1 - 2 + 1 = 0 \quad \checkmark$$

$$\int_{B_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = - \int_{B_1} (z+x^2) \, dx \, dy = \int_{B_1} (x^2+1) \, dx \, dy = \text{si fa}$$

$\uparrow$
 su B_1 è $(0,0,-1)$

$\uparrow$
 $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 \leq 1 \}$

$$\int_{B_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{B_2} (z+x^2) \, dx \, dy = \int_{B_2} (4+x^2) \, dx \, dy = \text{si fa}$$

$\uparrow$
 su B_2 è $(0,0,1)$

$\uparrow$
 $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 \leq 4 \}$

Da qui si arriva al flusso voluto.

3° modo→ Spero che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ (non funziona sempre)→ Trovo $\vec{F}$ tale che $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{E}$

→ Concludo con formula di STOKES (aka teo. rotore)

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_S \langle \operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_S \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle \, ds$$

$\uparrow$
 STOKES

$$= \int (A \, dx + B \, dy + C \, dz)$$

$\leftarrow \vec{\sigma}$
 curva che percorre ∂S con il VERSO GIUSTO

Nel nostro caso $\text{div } \vec{E} = 0$. Cerco $\vec{F} = (A, B, C)$ tale che
 $\text{rot } \vec{F} = \vec{E}$

$$\begin{cases} C_y - B_z = x + yz \\ A_z - C_x = -2y \\ B_x - A_y = z + x^2 \end{cases} \quad \text{Mettiamo } C \equiv 0 \quad \begin{cases} -B_z = x + yz \\ A_z = -2y \\ B_x - A_y = z + x^2 \end{cases}$$

$$B = -xz + \frac{1}{2}yz^2 \quad A = -2yz + \varphi(x, y)$$

Sostituendo nella 3ª: $B_x - A_y = z + x^2 \Leftrightarrow$

$$-z + 2z - \varphi_y = z + x^2 \quad \leadsto \quad \varphi = -yx^2$$

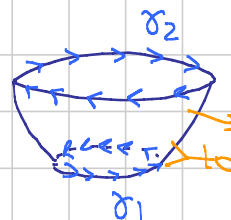
Quindi una possibilità è $F = (-2yz - yx^2, -xz + \frac{1}{2}yz^2, 0)$

Conclusione: basta calcolare

$$\int_{\gamma} [(-2yz - yx^2) dx + (-xz + \frac{1}{2}yz^2) dy]$$

Chi è γ ? Sono curve che descrivono ∂S e lo percorrono, avendo la testa rivolta nella direzione di $\vec{n}$, lasciando S a sx.

Quindi i versi sono quelli indicati in figura



$$\gamma_1(t) = \left(\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, 1 \right) : t \in [0, 2\pi] \quad x^2 + 2y^2 = 1$$

$$\gamma_2(t) = \left(2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, 4 \right) : t \in [0, 2\pi] \quad x^2 + 2y^2 = 4$$

↑ POI INVERTIRE IL VERSO

$$\int_{\gamma} A dx + B dy + C dz = \int_{\gamma_1} \dots - \int_{\gamma_2} \dots$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \cos^2 t \right) (-\sin t) dt \quad A dx \text{ su } \gamma_1$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left(-\cos t + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \, dt \quad \text{Bdy su } \partial_1$$

Analogamente per l'integrale su ∂_2

Oss. Vengono quasi tutti nulli oppure $\sin^2$ o $\cos^2$.
Quindi sono tutti una semplificazione.

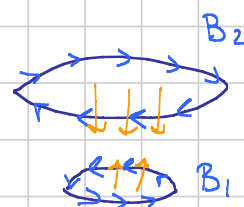
4° modo Dopo aver osservato che $\vec{E} = \text{rot } \vec{F}$ abbiamo che

$$\int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle \, ds = \int_{S_1} \langle \underbrace{\text{rot } \vec{F}}_{\vec{E}}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

su una qualunque superficie S_1 che abbia $\partial S_1 = \partial S$ e stessa orientazione.

Quindi posso fare il flusso su un'altra superficie che abbia lo stesso bordo. In questo caso uso come S_1 i 2 tappi, orientati come in figura

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma &= \int_{B_1} \langle \vec{E}, (0,0,1) \rangle \, d\sigma \\ &+ \int_{B_2} \langle \vec{E}, (0,0,-1) \rangle \, d\sigma \end{aligned}$$



e questo porta esattamente allo stesso conto del secondo modo.

Strategia: $\rightarrow$ Spero che $\text{div } \vec{E} = 0$ (non funziona sempre)
 $\rightarrow$ invece di calcolare il flusso attraverso S , calcolo il flusso attraverso una S_1 più comoda che abbia lo stesso bordo
 (OCCHIO A COME ORIENTARE LA NUOVA S_1).

— o — o —

ANALISI 2

- LEZIONE 54

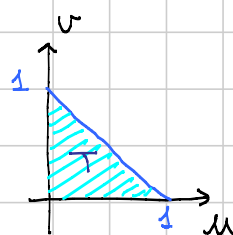
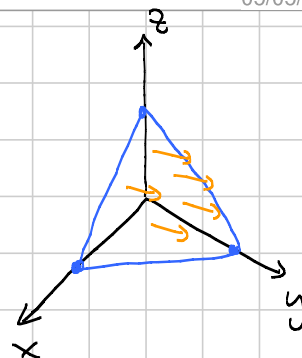
[Lockdown edition]

Note Title

05/05/2020

Esempio 1

- $S =$ triangolo con vertici in $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$
- normale in direzione uscente rispetto all'origine
- $E = (z, z, x)$

Calcolare $\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle dS$ 1° modo Uso definizione.

- Parametrizzo la superficie. Sta su $x+y+z=1 \Rightarrow z=1-x-y$ quindi

$$\Phi(u, v) = (u, v, 1-u-v) \quad (u, v) \in T$$

- Calcolo la normale involta dalla parametrizzazione

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \leadsto (1, 1, 1) \leftarrow \text{osservo che ha il verso giusto}$$

- Calcolo l'integrale

$$\iint_T [(1-u-v) \underset{A}{1} + (1-u-v) \underset{B}{1} + u \underset{C}{1}] du dv = \text{si fa ...}$$

$\quad \quad \quad M_1 \quad \quad \quad M_2 \quad \quad \quad M_3$

- 2° modo Dato che $\vec{E} = (z, z, x)$ si vede che $\text{div } \vec{E} = 0$ quindi posso
 - cambiare la superficie a parità di bordo
 - invento il rotore e mi riduco ad integrare di linea

Inversione del rotore

$$Cy - Bz = z$$

$$Az - Cx = z$$

$$Bx - Ay = x$$

$$B = -\frac{1}{2}z^2$$

$$A = \frac{1}{2}z^2 + \varphi(x, y)$$

$$\leadsto -\varphi_y = x \leadsto \varphi(x, y) = -xy$$

Quindi $\vec{F} = (\frac{1}{2}z^2 - xy, -\frac{1}{2}z^2, 0)$ verifica $\text{rot } \vec{F} = \vec{E}$
↑ Fai la!

Per il teo. del rotore (aka STOKES)

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{F}, \vec{c} \rangle ds$$

$$= \int_{\partial S} A dx + B dy + C dz$$

$$\vec{F} = (A, B, C)$$

curva che percorre
 ∂S in maniera
 opportuna

$$\gamma_1(t) = (1, 0, 0) + t(-1, 1, 0) = (1-t, t, 0)$$

$$\gamma_2(t) = (0, 1-t, t)$$

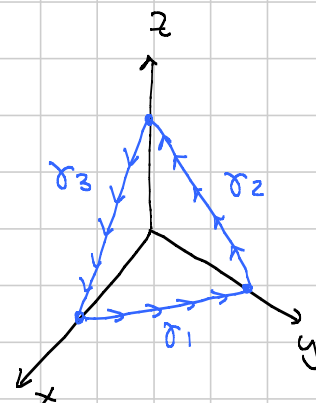
$$\gamma_3(t) = (t, 0, 1-t)$$

tutte con $t \in [0, 1]$

Quindi non resta che calcolare

$$\underbrace{\int_0^1 -t(1-t)(-1) dt}_{\int_{\gamma_1} \text{forma}} + \underbrace{\int_0^1 (-\frac{1}{2}t^2)(-1) dt}_{\int_{\gamma_2} \text{forma}}$$

$$+ \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{2}(1-t)^2 \cdot 1 dt}_{\int_{\gamma_3} \text{forma}}$$

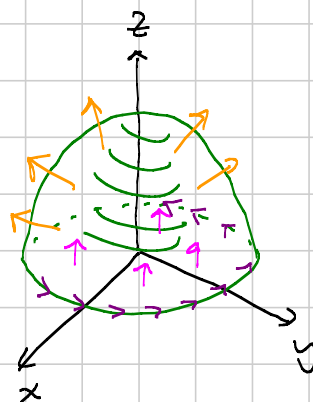


In alternativa, se volevamo cambiare la superficie, occorreva considerare i 3 triangoli delle restanti facce
 Orientati come? Orientati verso l'interno della piramide

Morale: se la divergenza è nulla, quello che esce da una parte è quello che entra dall'altra.

Esempio 2 $\rightarrow \vec{E} = (z, z, x)$
 $\rightarrow S =$ superficie descritta dalle equazioni
 $x^2 + y^2 + z^4 \leq 4 \quad z \geq 0$
 (metà di una specie di sfera)
 $\rightarrow n$ esterna rispetto alla sfera

1° modo Usare la definizione mi costringerebbe a parametrizzare e con z^4 è un problema, quindi cerchiamo alternative



2° modo Essendo $\text{div } \vec{E} = 0$, possiamo cambiare superficie. Quindi basta considerare la base orientata verso l'alto. La base è $x^2 + y^2 \leq 4$ con $z = 0$ e normale $(0, 0, 1)$.

$$\begin{aligned} \int_{\text{Base}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \langle (0, 0, x), (0, 0, 1) \rangle dx dy \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} x dx dy = 0. \end{aligned}$$

3° modo Potevamo usare Stokes e calcolare l'integrale di

$$A dx + B dy + C dz = \left(\frac{1}{2} z^2 - xy\right) dx - \frac{1}{2} z^2 dy$$

lungo la curva $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\gamma} \dots = \int_0^{2\pi} -4 \cos t \cdot \sin t (-2 \sin t) dt = \text{si fa e viene } 0.$$

4° modo Si poteva fare con teo. della divergenza usando $\Omega =$ tutta la semisfera come solido. Allora

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz &= \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma \\ &= \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma + \int_{\text{Base}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma \end{aligned}$$

$\uparrow$ normale esterna a $\partial\Omega$

$\downarrow (0,0,-1)$ perché è esterna

da cui

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = - \int_{\text{Base}} \langle \vec{E}, (0,0,-1) \rangle \, d\sigma$$

$\uparrow$ Base $\uparrow$

si compensano e viene lo stesso risultato del 2° modo.

Esempio 3 S è normale come prima, ma $\vec{E} = (x+z, z+y, x+zy)$

Adesso $\operatorname{div} \vec{E} = 1+1+y = y+2 \neq 0$, quindi gli approcci 2 e 3 non funzionano più

Restano solo la definizione (auguri!) oppure il teo. della div. La formula di sopra ci dice che

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz - \int_{\text{Base}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$(y+2)$ $\uparrow$ $(0,0,-1)$

$$\iiint_{\Omega} (y+2) \, dx \, dy \, dz = 2 \text{ Volume} = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \text{Area}(S_z) \, dz$$

$\downarrow$ per simmetria $\uparrow$ sezioni $\uparrow$ cerchio di raggio $\sqrt{4-z^2}$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (4-z^2) \, dz = \text{si fa facile}$$

$$\int_{\text{Base}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} -x \, dx \, dy$$

$\uparrow$
 sarebbe $x+zy$,
 ma $z=0$

$$= - \iint_{x^2+y^2 \leq 4} x \, dx \, dy = 0 \text{ per simmetria}$$

Oss. Volevamo la superficie si parametrizza osservando che le sezioni a z fisso sono circ. di raggio $\sqrt{4-z^2}$

$$(\sqrt{4-z^2} \cos \theta, \sqrt{4-z^2} \sin \theta, z)$$

con $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, \sqrt{2}]$.

— o — o —

ANALISI 2

- LEZIONE 55

[Lockdown edition]

Note Title

05/05/2020

Esempio 1 → Superficie descritta da $x^2 + y + z = 4$, $y \geq 0, z \geq 0$
 → Normale che in $(0, 0, 4)$ punta verso la z positive
 → $\vec{E} = (x+y, -zy+z, x+z)$

Calcolare $\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$

Captiamo come è fatta S . Possiamo scriverla come $z = 4 - y - x^2$ sotto la condizione $y + x^2 \leq 4$ e $y \geq 0$, cioè $0 \leq y \leq 4 - x^2$

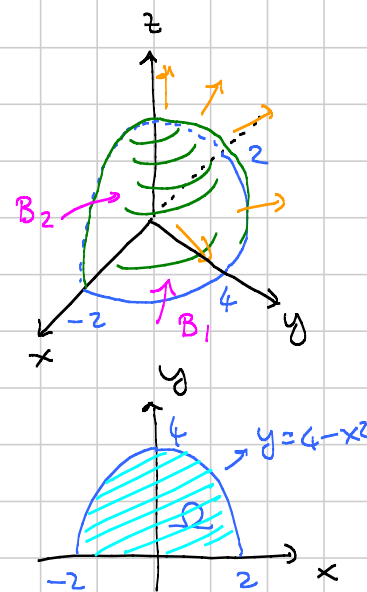
Moralmente: S è una cupola che si proietta su una base Ω

1° modo Posso parametrizzare S come $(u, v, 4 - v - u^2)$ con $(u, v) \in \Omega$
 Calcolo la normale e concludo.

2°-3° modo Essendo $\text{div } \vec{E} = 0$, posso invertire il rotore o cambiare superficie.
 Andando per la seconda, dobbiamo considerare le "basi" S_1 sotto e S_2 a lato, orientate verso l'interno

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_{B_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma + \int_{B_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \\ &= \int_{B_1} (x+z) dx dy + \int_{B_2} (-zy+z) dx dz \end{aligned}$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\int_{B_1} x \, dx \, dy = 0 \text{ per simmetria } (B_1 \text{ è } \Omega' \cap \Omega \text{ di sopra})$$

Ora B_2 è $\{(x, z) : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - x^2\}$
(è come Ω , solo su un altro piano)

$$\int_{B_2} z \, dx \, dz = \int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} z \, dz = \text{si fa.}$$

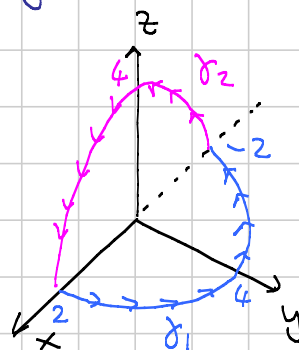
Se avessi inventito il rotore, poi dovevo integrare $A \, dx + B \, dy + C \, dz$ su due curve γ_1 e γ_2 date da

$$\gamma_2(t) = (t, 0, 4 - t^2) \text{ con } t \in [-2, 2]$$

$$\gamma_1(t) = (t, 4 - t^2, 0) \text{ con } t \in [-2, 2]$$

INVERTITA DI VERSO

— o — o —

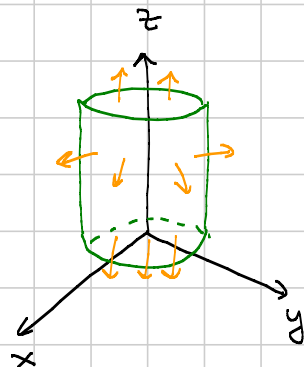


Esempio 2 → S cilindro come in figura

→ normale esterna

$$\rightarrow E = (y, x y, -x z)$$

Raggio base 1, altezza $0 \leq z \leq 2$



Calcolare : → il flusso uscente da tutto il cilindro
→ " " dalla sola sup. laterale

Indicato con C tutto il cilindro, per teo. divergenza

$$\int_{\partial C} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \iiint_C \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = 0 \quad \text{☺}$$

$$\int_{\text{Sup lat}} \dots + \int_{\text{Base sotto}} \dots + \int_{\text{Base sopra}} \dots$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{sup lat}} \dots &= - \int_{\text{Sotto}} \dots - \int_{\text{Sopra}} \dots \\
 &= - \int_{\text{Sotto}} \langle (y, xy, 0), (0, 0, -1) \rangle dx dy \rightsquigarrow 0 \\
 &\quad - \int_{\text{Sopra}} \langle (y, xy, -2x), (0, 0, 1) \rangle dx dy \rightsquigarrow 0 \\
 &\quad \text{per simmetria}
 \end{aligned}$$

Oss. Volendo potevo parametrizzare la sup. laterale come

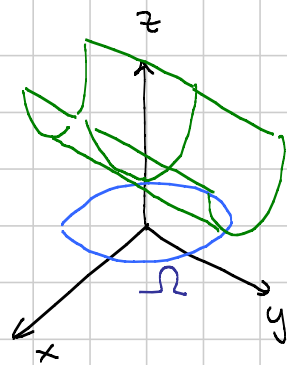
$$(\cos \theta, \sin \theta, w) \quad \text{con} \quad (\theta, w) \in [0, 2\pi] \times [0, 2]$$

Esempio 3 $\rightarrow$ S descritta da $z - y^2 = 1, x^2 + y^2 \leq 1$
 $\rightarrow$ normale verso il basso
 $\rightarrow E = (x, 2y, z^2)$

Osservo che S è il grafico di $z = 1 + y^2$ sulla base descritta da $x^2 + y^2 \leq 1$.

Qui userei la definizione

$$\Phi(u, v) = (u, v, 1 + v^2) \quad \text{con} \quad (u, v) \in \Omega$$



Calcolo la normale

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0, -2v, 1)$$

↑ è verso l'alto, quindi devo invertire i versi

$$\begin{aligned}
 \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \left[\underset{A \quad M_1}{u \cdot 0} + \underset{B \quad M_2}{2v(2v)} + \underset{C \quad M_3}{(1+v^2)^2 \cdot 1} \right] du dv \\
 &\quad \text{cambiato di segno} \\
 &= \text{si fa...}
 \end{aligned}$$

Esempio 4 S descritta da $4x^2 + y^2 e^x + z^2 = 1$ $y \geq 0$

Cerchiamo la normale che in $(0,0,1)$ punta verso le z positive

$$\vec{F} = (\sin y, x e^z, x z^2)$$

Vogliamo calcolare $\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$

Osserviamo intanto che S è limitata. Infatti

→ dall'eq. otteniamo subito $4x^2 \leq 1$ e $z^2 \leq 1$, quindi

$x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e $z \in [-1, 1]$. A questo punto $y^2 e^x \leq 1$, da cui

$y^2 \leq e^{-x} \leq e^{1/2}$ quando $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e quindi anche y è limitato

→ Fissato $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, si ottiene $e^x y^2 + z^2 \leq 1 - 4x^2$ e questa è una ellisse nelle variabili y e z .

Morale: le sezioni a x fisso sono ellissi

Di tutto questo prendiamo la parte con $y \geq 0$.

Come tentativo calcoliamo il rotore

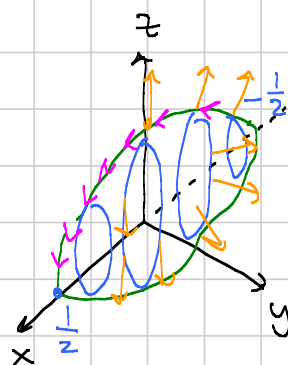
$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \sin y & x e^z & x z^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (x e^z, -z^2, e^z - \cos y) = \operatorname{rot} \vec{F}$$

Posso parametrizzare la superficie, ma non sembra essere molto semplice.

Alternativa: applico STOKES e calcolo

$$\int_{\gamma} A dx + B dy + C dz$$

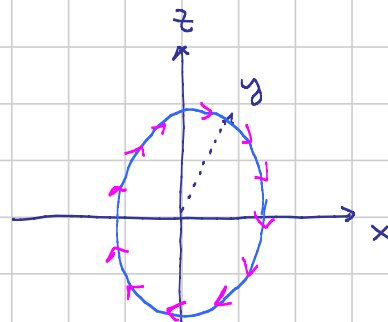
↑ bordo di S , che corrisponde a $y=0$



$\partial S =$ ellisse $4x^2 + z^2 = 1$, che parametrizzo come

$$\left(\frac{1}{2} \cos \theta, 0, \sin \theta \right) \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi]$$

Devo stabilire l'ORIENTAZIONE, quindi
va girata rispetto a sopra



$$\int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left[\underset{A}{0} \cdot \underset{\vec{x}(\theta)}{\left(-\frac{1}{2} \sin \theta\right)} + \underset{\vec{x}(\theta)}{\frac{1}{2} \cos \theta} \cdot \underset{\vec{z}(\theta)}{e^{\sin \theta}} \cdot \underset{\vec{y}(\theta)}{0} + \underset{\vec{x}(\theta)}{\frac{1}{2} \cos \theta} \underset{\vec{z}(\theta)^2}{\sin^2 \theta} \cdot \underset{\vec{z}(\theta)}{\cos \theta} \right] d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta) d\theta \quad \begin{matrix} y = 2\theta \\ dy = 2d\theta \end{matrix}$$

$$= -\frac{1}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2 y \cdot \frac{1}{2} dy$$

$$= -\frac{1}{16} \int_0^{4\pi} \sin^2 y dy = -\frac{\pi}{8}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 56

[Lock down Edition]

Note Title

07/05/2020

Integrali impropri in più variabili

Prerequisiti: $\rightarrow$ tutto il corso AM2-14
 $\rightarrow$ integrali impropri di ANALISI 1

Due integrali fondamentali

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dx dy \quad \begin{cases} \text{converge se } a < 1 \\ \text{diverge se } a \geq 1 \end{cases}$$

$$\sim \frac{1}{\rho^{2a}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coord. polari}}}{\rho} = \frac{1}{\rho^{2a-1}} \quad \text{converge } (\Leftrightarrow 2a-1 < 1 \Leftrightarrow a < 1)$$

$$\iint_{x^2+y^2 \geq R^2} \frac{1}{(x^2+y^2)^a} dx dy \quad \begin{cases} \text{converge se } a > 1 \\ \text{diverge se } a \leq 1 \end{cases}$$

Due modi di ricordarlo: $\rightarrow$ passando in coord. polari ci si riduce ad analisi 1, dove il cutoff è 1
 $\rightarrow$ senza nemmeno passare, si pensa che per l'integrale di $\frac{1}{\rho^2}$ il cutoff in dimensione d è proprio d .

Esempio 1 $\iint_A \frac{x}{x^2+y^2} dx dy$ su vari insiemi

- $A = \text{palla } x^2+y^2 \leq 1$ Brutal mode $\frac{\rho}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}$ converge perché esponente < 2

Rigorosamente: passiamo in coord. polari

$$\frac{|x|}{x^2+y^2} = \frac{\rho |\cos\theta|}{\rho^2} = \frac{|\cos\theta|}{\rho}$$

e quindi

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{|x|}{x^2+y^2} dx dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{|\cos\theta|}{\rho} \cdot \rho$$

$$= 4 \int_0^1 1 d\rho = 4$$

Senza valore assoluto si integra pure e viene 0 per simmetria.

- A : $x^2+y^2 \geq 1$ $\iint \frac{1}{\rho}$ diverge perché gli esponenti buoni ora sono quelli sopra a 2.

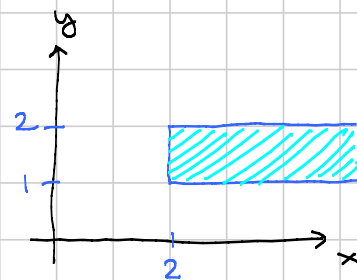
Rigoroso :

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{|x|}{x^2+y^2} dx dy = \dots \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta |\cos\theta| = 4 \int_1^{+\infty} d\rho = +\infty$$

Oss. Quando l'integrale con il valore assoluto fa $+\infty$, di sicuro quello senza non converge (NON È CHE FA 0 per simmetria)

- $A = [2, +\infty] \times [1, 2]$

In questo caso semplice volendo si calcola proprio



1° modo Calcolo: $\iint_A \frac{x}{x^2+y^2} dx dy = \int_2^{+\infty} dx \int_1^2 dy \frac{x}{x^2+y^2}$

= volendo la primitiva si fa

$$\iint_A \frac{x}{x^2+y^2} dx dy = \int_1^2 dy \int_2^{+\infty} dx \frac{x}{x^2+y^2} = +\infty$$

"brutalmente" $\left[\frac{1}{2} \log(x^2+y^2) \right]_{x=2}^{x=+\infty} = +\infty$

2° modo Stima + analisi 1

Per $(x,y) \in A$ vale $\frac{x}{x^2+y^2} \geq \frac{x}{x^2+4}$ e quindi

$$\begin{aligned} \iint_{\text{dato}} &\geq \iint \frac{x}{x^2+4} dx dy = \int_2^{+\infty} dx \int_1^2 dy \boxed{\frac{x}{x^2+4}} \\ &= \int_2^{+\infty} \frac{x}{x^2+4} dx \end{aligned}$$

e questo diverge per confr. asint. con $\frac{1}{x}$ (Analisi 1!!!)

• $A = [1, 2] \times [1, +\infty)$

1° modo Calcolo esplicito

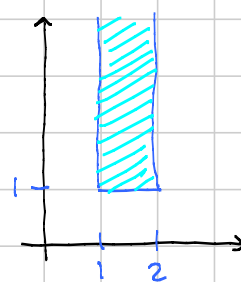
$$\begin{aligned} \iint_A \dots &= \int_1^{+\infty} dy \int_1^2 dx \frac{x}{x^2+y^2} \\ &= \int_1^{+\infty} dy \left[\frac{1}{2} \log(x^2+y^2) \right]_{x=1}^{x=2} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} dy \log\left(\frac{y^2+4}{y^2+1}\right) \text{ e questo converge perché} \end{aligned}$$

$$\log\left(\frac{y^2+4}{y^2+1}\right) = \log\left(1 + \frac{3}{y^2+1}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quando } y \rightarrow +\infty}}{\sim} \frac{3}{y^2+1}$$

e quindi si ha convergenza per C.A. con $\frac{1}{y^2}$.
Formalmente si tratta di dimostrare che

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{y^2+4}{y^2+1}\right)}{\frac{1}{y^2}} = 3 \quad (\text{Analisi 1!!!})$$

In alternativa, con il trucco dell'1 nascosto (analisi 1!) si poteva anche fare la primitiva.



2° modo Stima + analisi 1

$$\frac{x}{x^2+y^2} \leq \frac{2}{y^2+1} \quad \text{quando } (x,y) \in A$$

$\uparrow$
 num. + grande
 denom. + piccolo

[Achtung! Non pensare nemmeno di sostituire entrambe le x con 1 oppure 2]

Da qui in poi è facile

$$\begin{aligned} \iint_A \dots &\leq \iint_A \frac{2}{y^2+1} dx dy = 2 \int_1^{+\infty} dy \int_1^2 dx \frac{1}{y^2+1} \\ &= 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2+1} dy \quad \text{che conv. per analisi 1.} \end{aligned}$$

Esempio 2 $\iint_A \frac{xy^2}{x^6+y^6} dx dy$

• $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 7\}$

Brutal mode: $\frac{\rho^3}{\rho^6} = \frac{1}{\rho^3}$ con $3 > 2 \leadsto$ diverge

In coord. polari diventa

$$\int_0^{\sqrt{7}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho^3 |\cos\theta \sin^2\theta|}{\rho^6 (\cos^6\theta + \sin^6\theta)} \cdot \rho \quad \uparrow \uparrow$$

$$= \int_0^{\sqrt{7}} \frac{1}{\rho^2} d\rho \left[\int_0^{2\pi} \frac{|\cos\theta \sin^2\theta|}{\cos^6\theta + \sin^6\theta} d\theta \right]$$

$\downarrow$
 Numero positivo
 Diverge per Analisi 1.

Ossev. importante da fare: la funzione trigonometrica è ben definita e continua per $\theta \in [0, 2\pi]$.

La cosa importante è che il denominatore è $\geq m > 0$ per ogni θ per i discorsi di inizio corso.

- $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 y^2 \geq 13 \}$ "Problema all'infinito"

Come prima $\iint_A \dots = \int_{\sqrt{13}}^{+\infty} \frac{1}{\rho^2} d\rho \int_0^{2\pi} |\text{funz. trigo}(\theta)| d\theta$

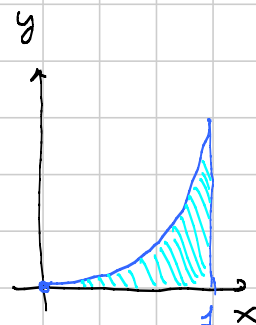
$\downarrow$ $\downarrow$
 converge per analisi 1 stesso numero positivo di prima

Dal momento che converge con il valore assoluto lo fa anche senza, e quindi converge a 0 per simmetria (ORA POSSIAMO DIRLO)

- $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 \}$

Brutal mode: $\frac{xy^2}{x^6+y^6} \sim \frac{x^5}{x^6+x^{12}} \sim \frac{1}{x}$
 $\uparrow$
per $x \rightarrow 0$

e quindi diverge.



Per dimostrare che diverge vorrei una stima dal basso

$$\frac{xy^2}{x^6+y^6} \geq \dots \text{ se voglio un numeratore pi\u00f9 piccolo posso solo mettere } 0 \quad \text{:(}$$

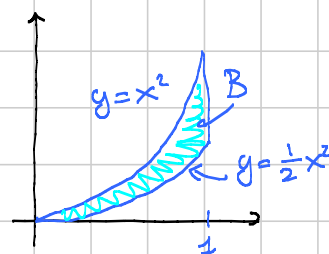
TRUCCO FONDAMENTALE: RESTRINGERE LA ZONA

Considero $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}x^2 \leq y \leq x^2 \}$

$$\iint_A \dots \geq \iint_B \dots \text{ perch\u00e9 la } f(x,y) \text{ \u00e8 } \geq 0$$

Ora su B vale che

$$\frac{xy^2}{x^6+y^6} \geq \frac{x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2}{x^6+x^{12}} = \frac{1}{4} \frac{x^5}{x^6+x^{12}}$$



Ora

$$\iint_B \dots \geq \frac{1}{4} \iint_B \frac{x^5}{x^6 + x^{12}} dx dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x^2}^{x^2} dy \frac{x^5}{x^6 + x^{12}}$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^1 \left[\frac{x^5}{x^6 + x^{12}} \cdot x^2 \right] dx \quad \rightarrow \text{tende a 0 quando } x \rightarrow 0.$$

e questo converge e non è nemmeno improprio !! 😞

Buco nell'acqua $\iint_A \dots \geq \iint_B \dots \geq \text{numero}$. E allora?

Ah! La stima brutale andava conessa perché sopra cui si aggiunge un x^2 perché l'insieme è "stretto"

Ma allora forse l'integrale su A converge per motivo analogo

$$\frac{xy^2}{x^6 + y^6} \leq \frac{x \cdot x^4}{x^6} = \frac{1}{x} \quad \text{per ogni } (x, y) \in A$$

e quindi

$$\begin{aligned} \iint_A \dots &\leq \iint_A \frac{1}{x} dx dy = \int_0^1 dx \frac{1}{x} \int_0^{x^2} dy = \int_0^1 dx \frac{1}{x} \cdot x^2 \\ &= \int_0^1 x dx = \text{😊} \end{aligned}$$

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 57

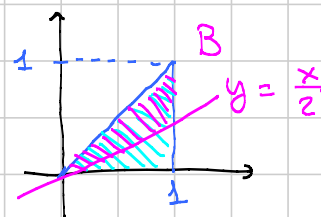
[Lock down Edition]

Note Title

07/05/2020

Esempio 1 $\iint_A \frac{xy^2}{x^6+y^6} dx dy$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$



Brutalmente $f(x, y) \sim \frac{x^3}{x^6} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zona integrazione}}}{x} \sim \frac{1}{x^2} \Rightarrow \text{diverge}$

1° modo Restringimento zona + stima.

Poniamo

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{2} \leq y \leq x\} \subseteq A$$

e osserviamo che $\frac{xy^2}{x^6+y^6} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{num + piccolo} \\ \text{denom + grande}}}{\geq} \frac{x \cdot (\frac{x}{2})^2}{x^6+x^6} = \frac{1}{8} \frac{x^3}{x^6} = \frac{1}{8} \frac{1}{x^3}$ per ogni $(x, y) \in B$

e quindi

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &\geq \iint_B f(x, y) dx dy \geq \frac{1}{8} \iint_B \frac{1}{x^3} dx \\ &= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{1}{x^3} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{1}{x^2} \right]_{\frac{x}{2}}^x dx = +\infty \end{aligned}$$

come suggerito dal brutal modo

2° modo Stima parziale senza restringere

$$\frac{xy^2}{x^6+y^6} \geq \frac{xy^2}{x^6+x^6} = \frac{y^2}{2x^5} \quad \text{per ogni } (x, y) \in A$$

da cui

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &\geq \iint_A \frac{y^2}{2x^5} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^5} dx \int_0^x y^2 dy \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{x^3}{x^5} dx \quad \leftarrow \text{ancora una volta } \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Esempio 2 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi$

Passando in coord. polari

$$\int_0^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\theta e^{-p^2} p = 2\pi \int_0^{+\infty} p e^{-p^2} dp = \pi \left[-e^{-p^2} \right]_{p=0}^{p=+\infty} = \pi$$

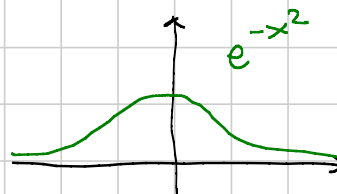
Ragionando in maniera cartesiana verrebbe

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2}}_I \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-y^2}}_I = I^2$$

Da questo si ricava che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Integrale della
Gaussiana



Esempio 3 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^3} dx dy$

Problema: quando y è negativo il termine $-y^3$ diventa positivo (e potenzialmente enorme).
Quindi l'idea è che diverga. Bisogna rendere
non utile il termine $-x^2$.

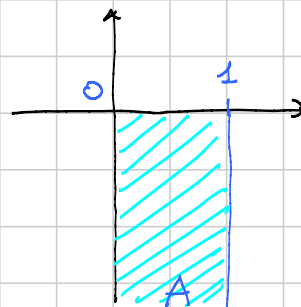
Osserviamo che $\iint_{\mathbb{R}^2} \dots \geq \iint_A \dots$
essendo l'integranda ≥ 0 .

Osserviamo anche che

$$e^{-x^2-y^3} \geq e^{-1-y^3} = \frac{1}{e} e^{-y^3}$$

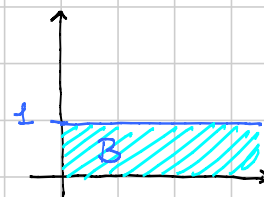
da cui

$$\iint_A e^{-x^2-y^3} dx dy \geq \frac{1}{e} \int_0^1 dx \int_{-\infty}^0 e^{-y^3} dy = \frac{1}{e} \int_{-\infty}^0 e^{-y^3} dy = +\infty.$$



Esempio 4 $\iint_A \frac{x}{y^3+1} dx dy$

- $A = 1^o$ quadrante



$$\iint_A \dots \geq \iint_B \frac{x}{y^3+1} dx dy \geq \frac{1}{2} \iint_B x dx dy$$

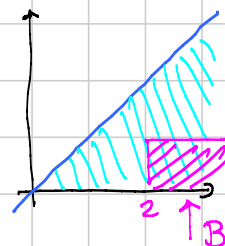
$\uparrow$
 $y \leq 1$
 B

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x dx = +\infty$$

- $A =$ parte del 1^o quadrante sotto bisettrice

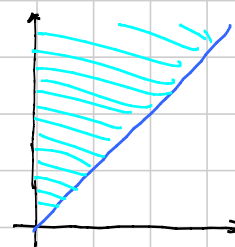
Diverge perché $\iint_A \dots \geq \iint_B \dots \geq \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} x dx = +\infty$

$\uparrow$ nuovo B



- $A =$ parte del 1^o quadrante sopra bisettrice

Conflitto: x al numeratore vorrebbe far divergere
 y^3 al denom. vorrebbe far convergere

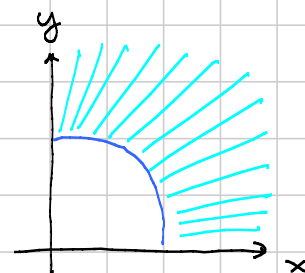


Impostando come insieme normale alla y

$$\begin{aligned} \iint_A \dots &= \int_0^{+\infty} dy \int_0^y dx \frac{x}{y^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^3+1} dy \int_0^y x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{y^3+1} dy \text{ e questo diverge per c.a. con } \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Esempio 5 $\iint_A \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy$

- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \geq 1\}$

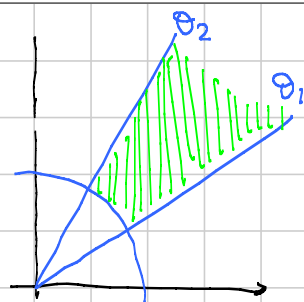


Brutale: $f(x,y) \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{\rho^2}$ ma questo diverge

Per farlo divergere serve stima con $\geq$, ma num. si può annullare

Idea: restringere zona di interazione, cercando di restare lontano dagli assi.

Scegliamo $0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$
ad esempio $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$ e consideriamo



l'insieme B definito in coord. polari da
 $\rho \geq 1$ e $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

Allora in B vale $xy = \rho^2 \cos \theta \sin \theta \geq m \rho^2$ con $m > 0$
(dove m è il minimo di $\cos \theta \sin \theta$ in $[\theta_1, \theta_2]$, e questo è strett. positivo perché... senti video :)) e quindi

$$\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} \geq \frac{\arctan(m\rho^2)}{\rho^2} \geq \frac{\arctan(m)}{\rho^2} \quad \text{in } B$$

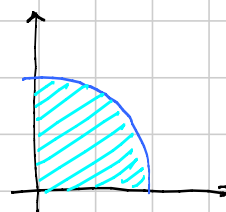
Ma allora

$$\iint_A \dots \geq \iint_B \dots \geq \iint_B \frac{\arctan(m)}{x^2+y^2} dx dy$$

$$= \int_1^{+\infty} d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\arctan(m)}{\rho^2} \cdot \rho = \arctan(m) (\theta_2 - \theta_1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho} d\rho$$

$$\bullet A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$$

Dire che $\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2+y^2}$ è inutile



perché a destra l'integrale divergerebbe, ed esagerata perché la stima $\arctan t \sim \frac{\pi}{2}$ va bene per t grandi e non per $t \rightarrow 0$.

Per t piccoli è migliore $\arctan t \leq t$

Ma allora $\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2}$
 $\uparrow$
 sempre vera nel 1° quadrante

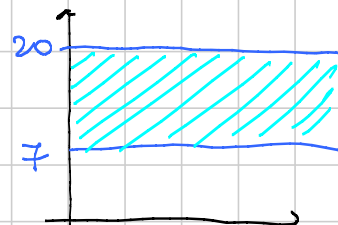
da cui

$$\iint_A \dots \leq \iint_A \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy$$

$$= \int_0^1 dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{\overbrace{p^2 \cos\theta \sin\theta}^{\leq 1}}{p^2} \cdot p \leq \frac{\pi}{2} \int_0^1 p dp$$

e questo converge.

• $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 7 \leq y \leq 20\}$



L'idea è che converga

$$\iint_A \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \iint_A \frac{1}{x^2+49} dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} dx \int_7^{20} dy \frac{1}{x^2+49}$$

$\uparrow$
 num + grande
 denom + piccolo

$$= \frac{13\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+49} dx$$

e questo converge per C.A. con $\frac{1}{x^2}$.

— 0 — 0 —

ANALISI 2

LEZIONE 58

[Lock down Edition]

Note Title

07/05/2020

Esempio 1 $\iint_A \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$

↑ ↑
due esponenti diversi

• $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \geq 1\}$

Idea chiave: paragonare gli esponenti

Cambio di variabili: $x = u^2$ $y = v$

→ La funzione diventa $\frac{1}{u^4+v^4}$ 😊

→ L'insieme diventa $u \geq 0, v \geq 0, u^4+v^2 \geq 1 \rightsquigarrow B$

→ Bisogna calcolare $J = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = 2u$

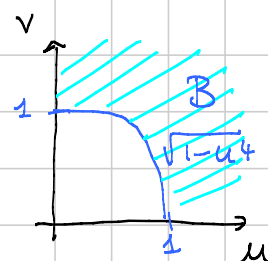
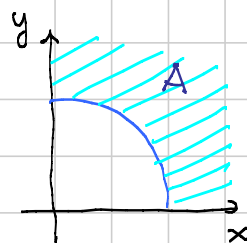
Di conseguenza

$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = \iint_B \frac{1}{u^4+v^4} \cdot 2u du dv$$

e questo con problema all'infinito converge perché

$$\frac{u}{u^4+v^4} \sim \frac{p}{p^4} = \frac{1}{p^3} \text{ e converge perché } 3 > 2$$

- Con $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$ il conto era simile e diventava divergente.

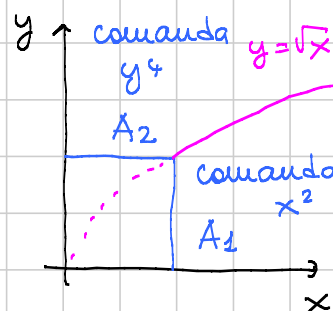


Modo alternativo di fare il 1° caso

Dividiamo le zone a seconda del termine che comanda

Posso considerare tranquillamente l'esterno del $\square$ invece che di Δ (la differenza è un numero)

$$\frac{1}{x^2+y^4}$$



I due termini contano = se $y = \sqrt{x}$.

Basta dim. che converge in A_1 e A_2 .

Zona A_1

$$\iint_{A_1} \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \frac{1}{x^2+y^4}$$

↑ salvo x^2 perché comanda lui

$$\leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \frac{1}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{x} dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \text{ e questo converge } \ddot{\smile}$$

Zona A_2

$$\iint_{A_2} \dots = \int_1^{+\infty} dy \int_0^{y^2} dx \frac{1}{x^2+y^4}$$

↑
normale
asse y

↑ salvo lui

$$\leq \int_1^{+\infty} dy \int_0^{y^2} dx \frac{1}{y^4} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^4} \cdot y^2 dy = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy$$

e questo converge $\ddot{\smile}$

Modo ancora alternativo Fare di brutto la primitiva !!!

Maggiori rispetto alla x che è più comodo

$$\iint_A \dots = \int_0^1 dy \int_1^{+\infty} dx \dots + \int_1^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} dx \dots$$



li studio separatamente

$$\int_0^1 dy \int_1^{+\infty} dx \frac{1}{x^2+y^4} \leq \int_0^1 dy \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ e questo converge}$$

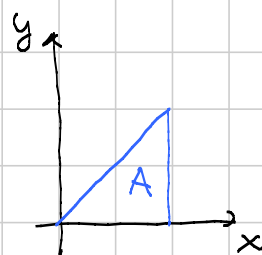
$$\int_1^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^2+y^4} = \int_1^{+\infty} dy \left[\frac{1}{y^2} \arctan\left(\frac{x}{y^2}\right) \right]_{x=0}^{x=+\infty}$$

↑
verificare la primitiva

$$= \int_1^{+\infty} dy \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{1}{y^2} \right\} \text{ e questo converge } \textcircled{\smile}$$

• $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

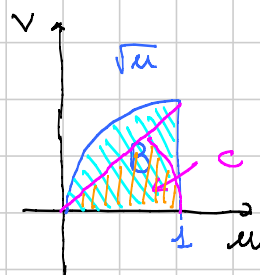
1° modo Cambio variabili $x = u^2, y = v$



Funzione e J sappiamo cosa sono. Cosa diventa l'insieme A?

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq u^2$$

[Esponente corretto dopo video, che
compromette i discorsi successivi
(vedi Forum)]



$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^4} dx dy = 2 \iint_B \frac{u}{u^4+v^4} du dv$$

$$\geq 2 \iint_C \frac{u}{u^4+v^4} du dv = 2 \int_0^1 dp \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{p \cos \theta}{p^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} \cdot p$$

strett. positiva
↑

$$= 2 \text{ costante} \int_0^1 \frac{1}{p^2} dp \text{ e questo diverge}$$

↑
integrale parte
trigonometrica

2° modo Siamo nella zona in cui domina x^2 ($y \leq \sqrt{x}$)

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \frac{1}{x^2+y^4} dx dy &\geq \frac{1}{2} \iint_{\Delta} \frac{1}{x^2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ che diverge.} \end{aligned}$$

• $A =$ altro triangolo

Brutal code: $\frac{1}{x^2+y^4} \sim$ dipende dalla zona in cui siamo

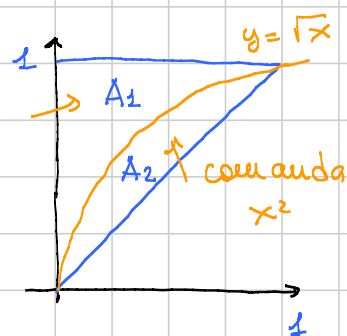


$$\iint_{A_2} \dots = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} dy \frac{1}{x^2+y^4}$$

comanda y^4

$$\geq \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} dy \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2} (\sqrt{x} - x) dx$$

e questo diverge per C.A. con $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}$
(sopra comanda $\sqrt{x}$)



Così per sport andiamo a studiare il caso su A_1

$$\begin{aligned} \iint_{A_1} \dots &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dx \frac{1}{x^2+y^4} \geq \frac{1}{2} \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dx \frac{1}{y^4} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{y^2} dy \text{ che diverge per lei} \end{aligned}$$

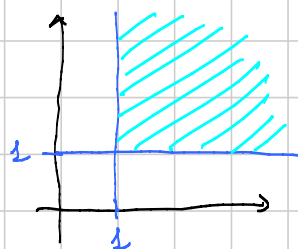
Oss. Quando siamo vicini a 0 si ha che $y^4 \leq y^2$
e quindi

$$\frac{1}{x^2+y^4} \geq \frac{1}{x^2+y^2}$$

e anche questo bastava per sistemare i casi sui triangoli.

Esempio 2 $\iint_A \frac{1}{x^2 y^2 + 1} dx dy$

• $A = [1, +\infty) \times [1, +\infty)$



Brutal mode: $f(x,y) \sim \frac{1}{\rho^4}$ e quindi converge

$$\iint_A \dots \leq \iint_A \frac{1}{x^2 y^2} dx dy = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx}_1 \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy}_1$$

e quindi converge

• $A = 1^o$ quadrante

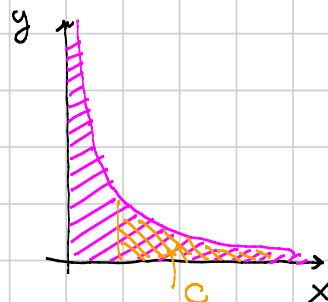
Brutal mode: come prima $\sim \frac{1}{\rho^4}$
 $\Rightarrow$ converge

(Uhm... vicino agli assi non convince molto questa stima)

Secondo brutal: ci sono grossi problemi dove xy è basso

Considero $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1\}$

In B vale $\frac{1}{x^2 y^2 + 1} \geq \frac{1}{2}$ e quindi



$$\begin{aligned} \iint_A \dots &\geq \iint_B \dots = \frac{1}{2} \iint_B 1 dx dy \geq \frac{1}{2} \iint_C 1 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \text{diverge!!!} \end{aligned}$$

Achtung! L'integrale sul 1° quadrante diverge per colpa del "piccolo" C .

$\uparrow$ [Corretto dopo video]

— o — o —

ANALISI 2

LEZIONE 59

[Lock down Edition]

Note Title

10/05/2020

Esempio 1 $\iint \frac{x^a}{x^4+y^4} dx dy$

- Per quali valori di a converge in B ?



Brutal mode: $\sim \frac{\rho^a}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^{4-a}} \leadsto \text{converge} \Leftrightarrow 4-a < 2$
 $\Leftrightarrow a > 2$

Ora ci sono due cose da dimostrare

- che per $a > 2$ converge
- che per $a \leq 2$ diverge

In questo caso si fa insieme passando in coord. polari

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{x^a}{x^4+y^4} dx dy &= \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{\rho^a \cos^a \theta}{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} \cdot \rho \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\rho^{3-a}} d\rho \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^a \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} d\theta}_{C(a) > 0} = C(a) \int_0^1 \frac{1}{\rho^{3-a}} d\rho \end{aligned}$$

Analisi 1: conv. $\Leftrightarrow 3-a < 1$
 $\Leftrightarrow a > 2$

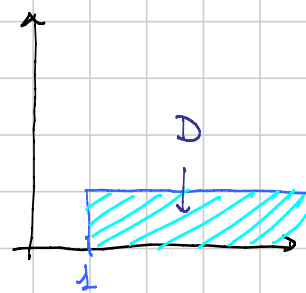
- Per quali valori di a converge in E ?

Stesso ragionamento, una conclusione $a < 2$.

- Per quali valori di a converge in D

Esplorazione

$$\iint_D \dots = \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x^a}{x^4+y^4} \sim \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{4-a}} dx \leadsto \text{conv.} \Leftrightarrow a < 3$$



Rigorosamente distinguiamo 2 casi

→ per $a < 3$ abbiamo $\iint_D \dots \leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x^a}{x^4} < +\infty$
denom + piccolo NON È FINITA QUI

→ per $a \geq 3$ abbiamo $\iint_D \dots \geq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x^a}{x^{4+1}} = +\infty$
analisi 1

ORA È FINITA DAVVERO.

Esempio 2 $\iint \frac{y^a}{x^6 + y^4} dx dy$

• Esaminiamo che succede in B

Cambio di variabili $x = u^2, y = v^3$

La funzione diventa $\frac{v^{3a}}{u^{12} + v^{12}}$, il B diventa un B'

abbastanza simile: $u \geq 0, v \geq 0, u^4 + v^6 \leq 1$

Calcolo J: $\begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 3v^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow y = 6uv^2$

Quindi

$$\iint_B \dots = 6 \iint_{B'} \frac{v^{3a}}{u^{12} + v^{12}} uv^2 du dv$$

Ora dal punto di vista della convergenza integrare in un qualunque intorno dell'origine è lo stesso

Brutal mode $\sim \frac{\rho^{3a+3}}{\rho^{12}} = \frac{1}{\rho^{9-3a}}$

e questo converge $(\Rightarrow) 9-3a < 2 \Leftrightarrow a > \frac{7}{3}$

Per rendere il discorso rigoroso si possono usare le polari

- Su E non cambia molto se non che si invertano le condizioni

Esempio 3
$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^a} dx dy dz$$

Per quali valori di a converge (quando converge, fa per forza 0 per simmetria in x o z)

Per studiare la convergenza servono i valori assoluti.

I problemi sono due:

→ nella palla $\leadsto B$

→ fuori dalla palla $\leadsto E$

Brutal mode: $\sim \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-2}} \leadsto$ in B converge
 $\Leftrightarrow 2a-2 < 3$
 $\Leftrightarrow a < \frac{5}{2}$
 (in $E \Leftrightarrow a > \frac{5}{2}$)

Per rendere rigoroso il discorso si usano le coord. sferiche

$$\frac{|xz|}{(\dots)^a} = \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} \cdot |\text{rota trig in } \theta \text{ e } \varphi| \quad \text{quindi}$$

$$= g(\theta, \varphi)$$

$$\iiint_B \dots = \int_0^1 d\rho \frac{1}{\rho^{2a-2}} \boxed{\rho^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \, g(\theta, \varphi) \cdot \boxed{\cos \varphi}$$

$$= \cos \theta \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-4}} d\rho \quad \text{e questo converge } \Leftrightarrow 2a-4 < 1$$

$$\Leftrightarrow a < \frac{5}{2}$$

Esempio 4 $\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\arctan(xy)}{(x^4+y^4+z^4)^a} dx dy dz$

Spettiamo in B ed E.

Studio in E Brutal mode: $\sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^{4a}} \leadsto \text{converge} \Leftrightarrow 4a > 3 \Leftrightarrow a > \frac{3}{4}$

$\rightarrow$ Caso $a > \frac{3}{4}$ $|f(x,y,z)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^{4a}} \frac{1}{[g(\theta,\varphi)]^a}$
 $\leq \text{cost} \frac{1}{\rho^{4a}}$

Posso fare l'ultima disug. se so che

$g(\theta,\varphi) \geq m > 0$ per tutti i valori ammissibili di θ e φ ,
 e questo si dimostra al solito modo

Dalla disug. segue che

$$\begin{aligned} \iiint_E |f(x,y,z)| dx dy dz &\leq \text{cost} \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{\rho^{4a}} e^{\varphi^2 \cos \varphi} \\ &= \text{nuova cost} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{4a-2}} d\rho \\ &\text{e si conclude con analisi 1} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Caso $a \leq \frac{3}{4}$ Questo caso VA FATTO, e non segue dal precedente !!!

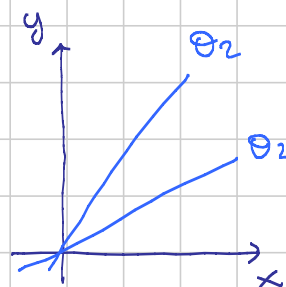
Vorrei scrivere $\geq$, ma posso solo se resto lontano dai piani $x=0$ e $y=0$.

Considero solo i p.ti descritti in coord. sferiche da

$$\rho \geq 1, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

chiamo questo insieme E' .

$\uparrow$ tiene grande $\cos \varphi$



Allora per $(x, y, z) \in E'$ vale la stima

$$\arctan(xy) \geq \arctan(\underbrace{\rho^2}_{\geq 1} \underbrace{\cos^2 \varphi}_{\geq \cos t} \underbrace{\sin \varphi \cos \varphi}_{\geq \cos t}) \geq m_0 > 0$$

Bingo!

$$\iiint_E \dots \geq \iiint_{E'} \dots \geq m_0 \iiint_{E'} \frac{1}{(\dots)^a}$$

↑
quella con
il val. assoluto

e questo con le sfere si vede
che diverge quando $a \leq \frac{3}{4}$

Studio in B $\sim \frac{xy}{(\dots)^a} \sim \frac{\rho^2}{\rho^{4a}} = \frac{1}{\rho^{4a-2}} \rightsquigarrow$ converge
 $\Leftrightarrow 4a-2 < 3$
 $\Leftrightarrow a < \frac{5}{4}$

Rigorosamente occorre distinguere 2 casi

→ $a < \frac{5}{4}$ Usiamo la stima $\frac{|\arctan(xy)|}{(\dots)^a} \leq \frac{|xy|}{(\dots)^a}$

e poi passiamo in sfere maggiorando al solito modo
tutta la roba trigonometrica.

Abbiamo usato che $|\arctan t| \leq |t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

→ $a \geq \frac{5}{4}$ In questo caso serve $\geq$, quindi dobbiamo
staccarci da $x=0$ e $y=0$, quindi definiamo B'
come $\rho \in [0, 1]$, $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$
 $\geq b_0 > 0$

$$\arctan(xy) = \arctan(\rho^2 \cos^2 \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta)$$

$$\geq \arctan(b_0 \rho^2)$$

Passando in sfere arriviamo a

$$\iiint_{E'} \dots \geq \cos t \int_0^1 \frac{\arctan(b_0 \rho^2)}{\rho^{4a-2}} d\rho$$

— 0 — 0 —

[valendo si può continuare
con $\geq c_0 b_0 \rho^2$ usando
 $\arctan t \geq \cot t$ per t piccoli]

e si conclude
con C.A. con

$$\frac{\rho^2}{\rho^{4a-2}}$$

ANALISI 2

LEZIONE 60

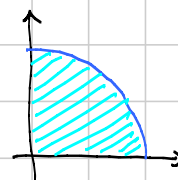
[Lock down Edition]

Note Title

10/05/2020

Esempio 1 $\iint \frac{x}{x^2+y^a} dx dy \quad (a>0)$

- A = quanto di palla



Pareggiamo con cambio di variabili

$$x = u^a \quad y = v^2$$

→ la funzione diventa $\frac{u^a}{u^{2a} + v^{2a}}$

→ D'insieme non cambia in modo rilevante

→ Calcoliamo J

$$\begin{pmatrix} a u^{a-1} & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix} \leadsto J = 2a u^{a-1} v$$

Quindi

$$\begin{aligned} \iint_{\text{dato}} &= 2a \iint_{A'} \frac{u^a}{u^{2a} + v^{2a}} u^{a-1} v \, du \, dv \\ &= 2a \iint_{A'} \frac{u^{2a-1} v}{u^{2a} + v^{2a}} \, du \, dv \end{aligned}$$

Brutal mode: $\sim \frac{e^{2a}}{e^{2a}}$ e quindi questo converge sempre.

Cercando di rendere il discorso rigoroso, si passa in coord. polari e viene fuori un

$$(\cos \theta)^{2a-1}$$

e l'esponente può essere negativo (se $a < \frac{1}{2}$), il che rende improprio l'integrale rispetto alla variabile θ , perché "c'è $\cos \theta$ al denominatore".

Ci sono 2 vie di uscita:

1 - osservare che, anche se al denom., l'esponente di $\cos \theta$ al denom. è < 1 , e quindi l'integrale in θ , anche se improprio, converge.

2 - fare un cambio di variabili diverso senza usare esponenti più piccoli di 1. Ad esempio

$$x = u^{a+1} \quad y = v^{2+\frac{2}{a}} \quad [\text{Vedi video per la ricerca degli esponenti}]$$

Con questi $\frac{x}{x^2+y^a} = \frac{u^{a+1}}{u^{2a+2} + v^{2a+2}}$

$$\begin{pmatrix} (a+1) u^a & 0 \\ 0 & (2+\frac{2}{a}) v^{1+\frac{2}{a}} \end{pmatrix} \text{ e quindi otteniamo}$$

$$\iint_{A'} \frac{u^{a+1}}{u^{2a+2} + v^{2a+2}} (a+1) \left(2+\frac{2}{a}\right) u^a \cdot v^{1+\frac{2}{a}}$$

Ora quando passiamo in coord. polari non ci sono più esponenti negativi.

Esempio 2 $\iint_Q \frac{\log(1+xy)}{(x^2+y^2)^a} dx dy \quad Q = 1^o \text{ quadrante}$

• Problema all'infinito $\leadsto$ insieme E

Brutal mode: $\frac{\log(1+xy)}{(x^2+y^2)^a} \sim \frac{\log(1+e^2)}{e^{2a}}$

e questo converge $\Leftrightarrow 2a > 2 \Leftrightarrow a > 1$

Per renderlo rigoroso ci sono due casi

→ $\boxed{a > 1}$ In coord. polari $\frac{\log(1 + \rho^2 \cos \theta \sin \theta)}{\rho^{2a}} \leq \frac{\log(1 + \rho^2)}{\rho^{2a}}$

e poi si conclude sfruttando che $\int_1^{+\infty} \frac{\log(1 + \rho^2)}{\rho^{2a-1}} d\rho$
↑ $\int$ delle coord. polari

Converge $\Leftrightarrow a > 1$ (Brutalmente: il $\log(1 + \rho^2)$ non conta nulla, rigorosamente vedi les. di analisi 1 :))

→ $\boxed{a \leq 1}$ Solito trucco di restringersi a $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

• Problema nell'origine $\rightsquigarrow B$

Brutal mode: $\frac{\log(1 + xy)}{(\dots)^a} \sim \frac{xy}{(\dots)^a} \sim \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-2}}$

quindi converge $\Leftrightarrow 2a - 2 < 2 \Leftrightarrow a < 2$
↑ [Conetti dopo video]

Quindi globalmente (su tutto $\mathbb{Q}$) converge $\Leftrightarrow 1 < a < \frac{3}{2}$

Ancora una volta occorre distinguere i casi come negli esempi con $\arctan(xy)$.

Esempio 3 $\iint_{\mathbb{Q}} \frac{e^{-xy} - 1}{x^2 + y^2} dx dy$ $\mathbb{Q} = 1^o$ quadrante

Brutalmente: sopra c'è $e^{-\rho^2}$, che spinge verso la convergenza, ma le cose non vanno così vicino agli assi.

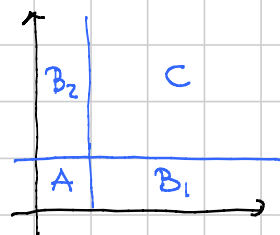
Vicino agli assi $e^{-xy} \sim 1$ e quindi resta $\frac{1}{x^2 + y^2}$, che in $\mathbb{R}^2$ non basta per la convergenza.

Se non ci fosse -1 al numeratore ci sarebbero problemi nell'origine e divergerebbe l'integrale in B .

$$\frac{e^{-xy}}{x^2 + y^2} \geq \frac{\cos t}{x^2 + y^2}$$

Allora distinguiamo 4 zone

Zona A Osserviamo che $e^{-xy} - 1 \sim -xy$
e quindi il num., a meno del
segno, è come fosse xy , quindi
 $\frac{p^2}{p^2}$ è tranquillissimo



Rigoroso : esiste M_0 tale che $|e^{-t} - 1| \leq M_0 |t|$
per ogni $t \in [-1, 1]$.

Questo è analitico studiando la funzione $\frac{e^{-t}-1}{t}$
che è estendibile con continuità a $[-1, 1]$

Da questo segue che

$$\iint_A \frac{|e^{-xy} - 1|}{x^2 + y^2} dx dy \leq M_0 \iint_A \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy \text{ e questo no problem}$$

ZONA B1 Qui sappiamo che $0 \leq e^{-xy} \leq 1$ e quindi

$-1 \leq e^{-xy} - 1 \leq 0$ e quindi $|e^{-xy} - 1| \leq 1$. Ma allora

$$\iint_{B_1} \frac{|e^{-xy} - 1|}{x^2 + y^2} dx dy \leq \iint_{B_1} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy \leq \iint_{B_1} \frac{1}{x^2} dx dy$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ che converge } \text{☺}$$

Zona B2 Stessa cosa

Zona C Dico che $\iint_C \frac{e^{-xy}}{x^2 + y^2} dx dy$ converge

e ovviamente

$$\iint_C \frac{-1}{x^2 + y^2} dx dy \text{ diverge}$$

Mi interessa il 1°. Come sfrutto la potenza di xy ?

Uso la disuguaglianza $xy \geq \frac{1}{2}(x+y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{C}$.

Come si dimostrava?



In C_1 vale $xy \geq x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$
 $y \geq 1$ (under x) $x \geq y$ in C_1 (under y)

In C_2 vale $xy \geq y = \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$
 $x \geq 1$ (under y) $y \geq x$ in C_2 (under x)

Ora sappiamo che $e^{-xy} \leq e^{-\frac{1}{2}(x+y)}$ e quindi

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{e^{-xy}}{x^2+y^2} dx dy \leq \iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{x^2+y^2} e^{-\frac{1}{2}(x+y)} dx dy$$

$$\leq \iint_E \text{stessa funzione (perché } \mathbb{C} \subseteq E)$$

(coord. polari)

$$= \int_1^{+\infty} dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{p^2} e^{-\frac{1}{2}p(\cos\theta + \sin\theta)} p$$

$$\leq \int_1^{+\infty} dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \boxed{\frac{1}{p} e^{-mp}}$$

se $m > 0$ basta per avere conv.

Per avere questa disuguaglianza basta osservare che

$$\frac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta) \geq m > 0 \quad \text{per ogni } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (\text{soliti discorsi})$$

— o — o —
 FINE CORSO