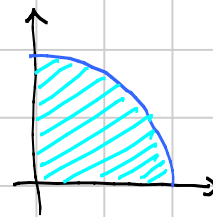


Esempio 1 $\iint \frac{x}{x^2+y^a} dx dy \quad (a>0)$

- $A =$ quanto di palla



Panggiamo con cambio di variabili

$$x = u^a$$

$$y = v^2$$

→ la funzione diventa $\frac{u^a}{u^{2a} + v^{2a}}$

→ L'insieme non cambia in modo rilevante

→ Calcoliamo J

$$\begin{pmatrix} a u^{a-1} & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix} \leadsto J = 2a u^{a-1} v$$

Quindi

$$\begin{aligned} \iint_{\text{dato}} &= 2a \iint_{A'} \frac{u^a}{u^{2a} + v^{2a}} u^{a-1} v \, du \, dv \\ &= 2a \iint_{A'} \frac{u^{2a-1} v}{u^{2a} + v^{2a}} \, du \, dv \end{aligned}$$

Brutal mode: $\sim \frac{e^{2a}}{e^{2a}}$ e quindi questo converge sempre.

Cercando di rendere il discorso rigoroso, si passa in coord. polari e viene fuori un

$$(\cos \theta)^{2a-1}$$

e l'esponente può essere negativo (se $a < \frac{1}{2}$), il che rende improprio l'integrale rispetto alla variabile θ , perché "c'è $\cos \theta$ al denominatore".

Ci sono 2 vie di uscita:

1 - osservare che, anche se al denom., l'esponente di $\cos \theta$ al denom è < 1 , e quindi l'integrale in θ , anche se improprio, converge.

2 - fare un cambio di variabili diverso senza usare esponenti più piccoli di 1. Ad esempio

$$x = u^{a+1}$$

$$y = v^{2 + \frac{2}{a}}$$

[Vedi video per la ricerca degli esponenti]

Con questi

$$\frac{x}{x^2 + y^a} = \frac{u^{a+1}}{u^{2a+2} + v^{2a+2}}$$

$$\begin{pmatrix} (a+1) u^a & 0 \\ 0 & (2 + \frac{2}{a}) v^{1 + \frac{2}{a}} \end{pmatrix} \quad \text{e quindi otteniamo}$$

$$\iint_{A'} \frac{u^{a+1}}{u^{2a+2} + v^{2a+2}} (a+1) \left(2 + \frac{2}{a}\right) u^a \cdot v^{1 + \frac{2}{a}}$$

Ora quando passiamo in coord. polari non ci sono più esponenti negativi.

Esempio 2 $\iint_Q \frac{\log(1+xy)}{(x^2+y^2)^a} dx dy \quad Q = 1^\circ \text{ quadrante}$

• Problema all'infinito $\leadsto$ insieme E

Brutal mode: $\frac{\log(1+xy)}{(x^2+y^2)^a} \sim \frac{\log(1+e^z)}{e^{2a}}$

e questo converge $\Leftrightarrow 2a > 2 \Leftrightarrow a > 1$

Per renderlo rigoroso ci sono due casi

→ $\boxed{a > 1}$ In coord. polari $\frac{\log(1 + \rho^2 \cos \theta \sin \theta)}{\rho^{2a}} \leq \frac{\log(1 + \rho^2)}{\rho^{2a}}$

e poi si conclude sfruttando che $\int_1^{+\infty} \frac{\log(1 + \rho^2)}{\rho^{2a-1}} d\rho$ ↑ $\int$ delle coord. polari

Converge $\Leftrightarrow a > 1$ (Brutalmente: il $\log(1 + \rho^2)$ non conta nulla, rigorosamente vedi les. di analisi 1 :))

→ $\boxed{a \leq 1}$ Solito trucco di restringersi a $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

• Problema nell'origine $\leadsto B$

Brutal mode: $\frac{\log(1 + xy)}{(---)^a} \sim \frac{xy}{(---)^a} \sim \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-2}}$

quindi converge $\Leftrightarrow 2a - 2 < 2 \Leftrightarrow a < 2$
↑ $\left[\text{Conetti dopo video} \right]$ ↑

Quindi globalmente (su tutto $\mathbb{Q}$) converge $\Leftrightarrow 1 < a < \frac{3}{2}$

Ancora una volta occorre distinguere i casi come negli esempi con $\arctan(xy)$.

Esempio 3 $\iint_{\mathbb{Q}} \frac{e^{-xy} - 1}{x^2 + y^2} dx dy$ $\mathbb{Q} = 1^o$ quadrante

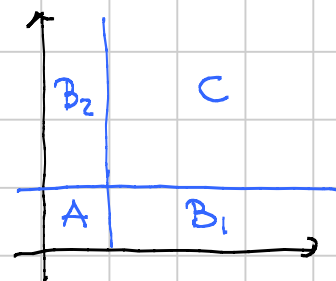
Brutalmente: sopra c'è $e^{-\rho^2}$, che spinge verso la convergenza, ma le cose non vanno così vicino agli assi.

Vicino agli assi $e^{-xy} \sim 1$ e quindi resta $\frac{1}{x^2 + y^2}$, che in $\mathbb{R}^2$ non basta per la convergenza.

Se non ci fosse -1 al numeratore ci sarebbero problemi nell'origine e divergerebbe l'integrale in B .

$$\frac{e^{-xy}}{x^2 + y^2} \geq \frac{\cos t}{x^2 + y^2}$$

Allora distinguiamo 4 zone



Zona A Osserviamo che $e^{-xy} - 1 \sim -xy$ e quindi il num., a meno del segno, è come fosse xy , quindi $\frac{p^2}{p^2}$ è tranquillissimo

Rigoroso : esiste M_0 tale che $|e^{-t} - 1| \leq M_0 |t|$ per ogni $t \in [-1, 1]$.

Questo è analitico e studiando la funzione $\frac{e^{-t}-1}{t}$ che è estendibile con continuità a $[-1, 1]$

Da questo segue che

$$\iint_A \frac{|e^{-xy} - 1|}{x^2 + y^2} dx dy \leq M_0 \iint_A \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy \text{ e questo no problem}$$

ZONA B1 Qui sappiamo che $0 \leq e^{-xy} \leq 1$ e quindi

$-1 \leq e^{-xy} - 1 \leq 0$ e quindi $|e^{-xy} - 1| \leq 1$. Ma allora

$$\iint_{B_1} \frac{|e^{-xy} - 1|}{x^2 + y^2} dx dy \leq \iint_{B_1} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy \leq \iint_{B_1} \frac{1}{x^2} dx dy$$

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ che converge } \text{☺}$$

Zona B2 Stessa cosa

Zona C Dico che $\iint_C \frac{e^{-xy}}{x^2 + y^2} dx dy$ converge

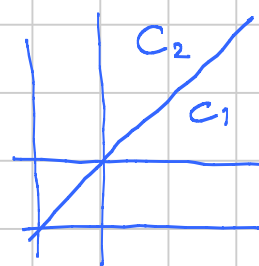
e ovviamente

$$\iint_C \frac{-1}{x^2 + y^2} dx dy \text{ diverge}$$

mi interessa il 1°. Come sfrutto la potenza di xy ?

Uso la disuguaglianza $xy \geq \frac{1}{2}(x+y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{C}$.

Come si dimostrava?



$$\text{In } C_1 \text{ vale } xy \geq x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$

$\uparrow$ $y \geq 1$ $\uparrow$ $x \geq y$ in C_1

$$\text{In } C_2 \text{ vale } xy \geq y = \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$

$\uparrow$ $x \geq 1$ $\uparrow$ $y \geq x$ in C_2

Ora sappiamo che $e^{-xy} \leq e^{-\frac{1}{2}(x+y)}$ e quindi

$$\iint_C \frac{e^{-xy}}{x^2+y^2} dx dy \leq \iint_C \frac{1}{x^2+y^2} e^{-\frac{1}{2}(x+y)} dx dy$$

$$\leq \iint_E \text{stessa funzione (perché } C \subseteq E)$$

(coord. polari)

$$= \int_1^{+\infty} dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{p^2} e^{-\frac{1}{2}p(\cos\theta + \sin\theta)} p$$

$$\leq \int_1^{+\infty} dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \boxed{\frac{1}{p} e^{-mp}}$$

se $m > 0$ basta per avere conv.

Per avere questa disuguaglianza basta osservare che

$$\frac{1}{2}(\cos\theta + \sin\theta) \geq m > 0 \quad \text{per ogni } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (\text{soliti discorsi})$$

— o — o —

FINE CORSO