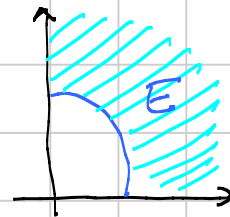
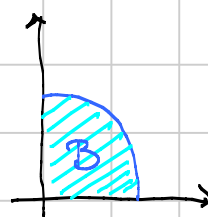


Esempio 1 $\iint \frac{x^a}{x^4+y^4} dx dy$

- Per quali valori di a converge in B ?



Brutal mode: $\sim \frac{\rho^a}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^{4-a}} \rightsquigarrow \text{converge} \Leftrightarrow 4-a < 2$
 $\Leftrightarrow a > 2$

Ora ci sono due cose da dimostrare

- che per $a > 2$ converge
- che per $a \leq 2$ diverge

In questo caso si fa insieme passando in coord. polari

$$\iint_B \frac{x^a}{x^4+y^4} dx dy = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{\rho^a \cos^a \theta}{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} \cdot \rho$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\rho^{3-a}} d\rho \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^a \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} d\theta}_{C(a) > 0} = C_a \int_0^1 \frac{1}{\rho^{3-a}} d\rho$$

Analisi 1: conv. $\Leftrightarrow 3-a < 1$
 $\Leftrightarrow a > 2$

- Per quali valori di A converge in E ?

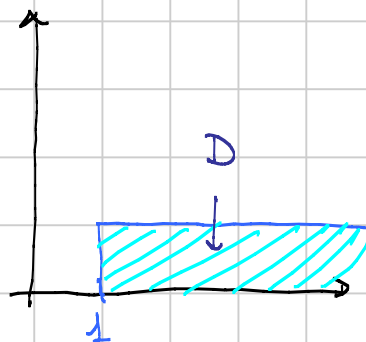
Stesso ragionamento, ma conclusione $a < 2$.

- Per quali valori di a converge in D

Esplorazione

$$\iint_D \dots = \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x^a}{x^4+y^4} \sim \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{4-a}} dx$$

$\rightsquigarrow \text{conv.} \Leftrightarrow a < 3$



Rigorosamente distinguiamo 2 casi

→ per $a < 3$ abbiamo $\iint_D \dots \leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x^a}{x^4} < +\infty$
denom. piccolo NON È FINITA QUI

→ per $a \geq 3$ abbiamo $\iint_D \dots \geq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{x^a}{x^{4+1}} = +\infty$
analisi 1

ORA È FINITA DAVVERO.

Esempio 2 $\iint \frac{y^a}{x^6+y^4} dx dy$

• Esaminiamo che succede in B

Cambio di variabili $x = u^2, y = v^3$

La funzione diventa $\frac{v^{3a}}{u^{12} + v^{12}}$, il B diventa un B'

abbastanza simile: $u \geq 0, v \geq 0, u^4 + v^6 \leq 1$

Calcolo J: $\begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 3v^2 \end{pmatrix} \leadsto J = 6uv^2$

Quindi

$$\iint_B \dots = 6 \iint_{B'} \frac{v^{3a}}{u^{12} + v^{12}} uv^2 du dv$$

Ora dal punto di vista della convergenza integrare in un qualunque intorno dell'origine è lo stesso

Brutal mode $\sim \frac{\rho^{3a+3}}{\rho^{12}} = \frac{1}{\rho^{9-3a}}$

e questo converge $(\Rightarrow) 9-3a < 2 \Leftrightarrow a > \frac{7}{3}$

Per rendere il discorso rigoroso si possono usare le polari

- Su E non cambia molto se non che si invertono le condizioni

Esempio 3
$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^a} dx dy dz$$

Per quali valori di a converge (quando converge, fa per forza 0 per simmetria in x o z)

Per studiare la convergenza servono i valori assoluti.

I problemi sono due:

→ nella palla $\leadsto B$

→ fuori dalla palla $\leadsto E$

Brutal mode: $\sim \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-2}} \leadsto$ in B converge
 $\Leftrightarrow 2a-2 < 3$
 $\Leftrightarrow a < \frac{5}{2}$
(in $E \Leftrightarrow a > \frac{5}{2}$)

Per rendere rigoroso il discorso si usano le coord. sferiche

$$\frac{|xz|}{(\dots)^a} = \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} \cdot |\text{roba trigo in } \theta \text{ e } \varphi| \quad \text{quindi} \\ = g(\theta, \varphi)$$

$$\iiint_B \dots = \int_0^1 d\rho \frac{1}{\rho^{2a-2}} \boxed{\rho^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \, g(\theta, \varphi) \cdot \boxed{\cos \varphi}$$

$$= \underset{>0}{\cos \theta} \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-4}} d\rho \quad \text{e questo converge } \Leftrightarrow 2a-4 < 1 \\ \Leftrightarrow a < \frac{5}{2}.$$

Esempio 4 $\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\arctan(xy)}{(x^4+y^4+z^4)^a} dx dy dz$

Spettiamo in B ed E.

Studio in E Brutal mode: $\sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^{4a}} \leadsto \text{converge} \Leftrightarrow 4a > 3 \Leftrightarrow a > \frac{3}{4}$

$\rightarrow$ Caso $a > \frac{3}{4}$ $|f(x,y,z)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^{4a}} \frac{1}{[g(\theta,\varphi)]^a}$
 $\leq \text{cost} \frac{1}{\rho^{4a}}$

Posso fare l'ultima disug. se so che

$g(\theta,\varphi) \geq u > 0$ per tutti i valori ammissibili di θ e φ ,
 e questo si dimostra al solito modo

Dalla disug. segue che

$$\iiint_E |f(x,y,z)| dx dy dz \leq \text{cost} \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{1}{\rho^{4a}} \rho^2 \cos\varphi$$

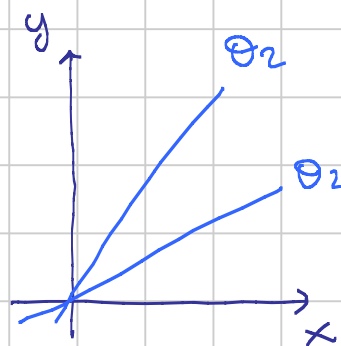
$$= \text{nuova cost} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{4a-2}} d\rho$$

e si conclude con analisi 1

$\rightarrow$ Caso $a \leq \frac{3}{4}$ Questo caso VA FATTO, e non segue dal precedente !!!

Vorrei scrivere $\geq$, ma posso solo se resto lontano dai piani $x=0$ e $y=0$.

Considero solo i p.ti descritti in coord. sferiche da



$\rho \geq 1, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$

$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

chiamo questo insieme E' .

$\uparrow$ tiene grande $\cos\varphi$

Allora per $(x,y,z) \in E'$ vale la stima

$$\arctan(xy) \geq \arctan \left(\underbrace{\rho^2}_{\geq 1} \underbrace{\cos^2 \varphi}_{\geq \cos \theta} \underbrace{\sin \theta \cos \theta}_{\geq \cos \theta} \right) \geq m_0 > 0$$

Biugo!

$$\iiint_E \dots \geq \iiint_{E'} \dots \geq m_0 \iiint_{E'} \frac{1}{(\dots)^a}$$

↑
quella con
il val. assoluto

e questo con le sfere si vede
che diverge quando $a \leq \frac{3}{4}$

Studio in B $\sim \frac{xy}{(\dots)^a} \sim \frac{\rho^2}{\rho^{4a}} = \frac{1}{\rho^{4a-2}} \leadsto$ converge
 $\Leftrightarrow 4a-2 < 3$
 $\Leftrightarrow a < \frac{5}{4}$

Rigorosamente occorre distinguere 2 casi

$\rightarrow$ $a < \frac{5}{4}$ Usiamo la stima $\frac{|\arctan(xy)|}{(\dots)^a} \leq \frac{|xy|}{(\dots)^a}$

e poi passiamo in sfere maggiorando al solito modo
tutta la roba trigonometrica.

Abbiamo usato che $|\arctan t| \leq |t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ $a \geq \frac{5}{4}$ In questo caso serve $\geq$, quindi dobbiamo
staccarci da $x=0$ e $y=0$, quindi definiamo B'
come $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

$$\arctan(xy) = \arctan \left(\rho^2 \underbrace{\cos^2 \varphi \cos \theta \sin \theta}_{\geq b_0 > 0} \right)$$

$$\geq \arctan(b_0 \rho^2)$$

[volendo si può continuare
con $\geq c_0 b_0 \rho^2$ usando
 $\arctan t \geq \cot$ per t piccoli]

Passando in sfere arriviamo a

$$\iiint_{E'} \dots \geq \cos \theta \int_0^1 \frac{\arctan(b_0 \rho^2)}{\rho^{4a-2}} d\rho$$

e si conclude
con C.A. con
 $\frac{\rho^2}{\rho^{4a-2}}$

— o — o —