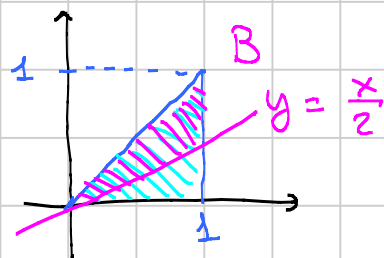


Esempio 1 $\iint_A \frac{xy^2}{x^6+y^6} dx dy$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$



Brutalmente $f(x, y) \sim \frac{x^3}{x^6} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zona integrazione}}}{x} \sim \frac{1}{x^2} \Rightarrow \text{diverge}$

1° modo Restringimento zona + stima.

Poniamo

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{2} \leq y \leq x\} \subseteq A$$

e osserviamo che $\frac{xy^2}{x^6+y^6} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{num + piccolo} \\ \text{denom + grande}}}{\geq} \frac{x \cdot (\frac{x}{2})^2}{x^6+x^6} = \frac{1}{8} \frac{x^3}{x^6} = \frac{1}{8} \frac{1}{x^3}$ per ogni $(x, y) \in B$

e quindi

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &\geq \iint_B f(x, y) dx dy \geq \frac{1}{8} \iint_B \frac{1}{x^3} dx \\ &= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^x dy \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \boxed{\frac{1}{x^2}} dx = +\infty \end{aligned}$$

come suggerito dal brutal mode

2° modo Stima parziale senza restringere

$$\frac{xy^2}{x^6+y^6} \geq \frac{xy^2}{x^6+x^6} = \frac{y^2}{2x^5} \quad \text{per ogni } (x, y) \in A$$

da cui

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &\geq \iint_A \frac{y^2}{2x^5} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^5} dx \int_0^x y^2 dy \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{x^3}{x^5} dx \quad \text{ancora una volta } \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Esempio 2 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi$

Passando in coord. polari

$$\int_0^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\theta e^{-p^2} p = 2\pi \int_0^{+\infty} p e^{-p^2} dp = \pi [-e^{-p^2}]_{p=0}^{p=+\infty} = \pi$$

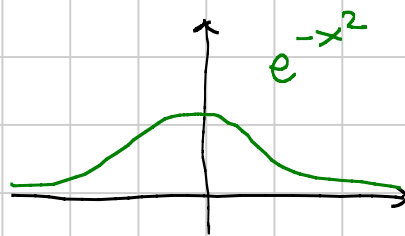
Ragionando in maniera cartesiana verrebbe

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2}}_I \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-y^2}}_I = I^2$$

Da questo si ricava che

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

Integrale della
Gaussiana



Esempio 3 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^3} dx dy$

Problema: quando y è negativo il termine $-y^3$ diventa positivo (e potenzialmente enorme).
Quindi l'idea è che diverga. Bisogna rendere non utile il termine $-x^2$.

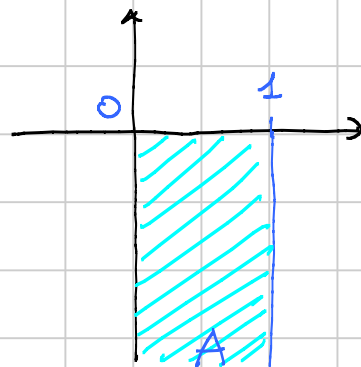
Osserviamo che $\iint_{\mathbb{R}^2} \dots \geq \iint_A \dots$
essendo l'integranda ≥ 0 .

Osserviamo anche che

$$e^{-x^2-y^3} \geq e^{-1-y^3} = \frac{1}{e} e^{-y^3}$$

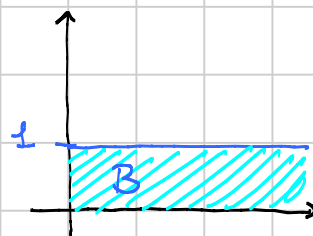
da cui

$$\iint_A e^{-x^2-y^3} dx dy \geq \frac{1}{e} \int_0^1 dx \int_{-\infty}^0 e^{-y^3} dy = \frac{1}{e} \int_{-\infty}^0 e^{-y^3} dy = +\infty.$$



Esempio 4 $\iint_A \frac{x}{y^3+1} dx dy$

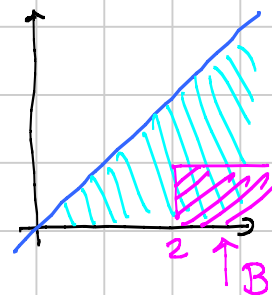
- $A = 1^o$ quadrante



$$\iint_A \dots \geq \iint_B \frac{x}{y^3+1} dx dy \geq \frac{1}{2} \iint_B x dx dy \stackrel{y \leq 1}{=} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x dx = +\infty$$

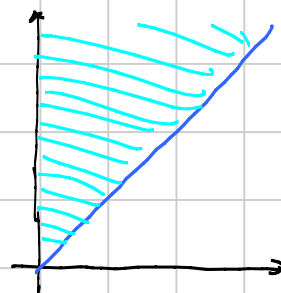
- $A =$ parte del 1^o quadrante sotto bisettrice

$$\text{Diverge perché } \iint_A \dots \geq \iint_B \dots \stackrel{\text{nuovo B}}{=} \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} x dx = +\infty$$



- $A =$ parte del 1^o quadrante sopra bisettrice

Conflitto: x al numeratore vorrebbe far divergere
 y^3 al denom. vorrebbe far convergere



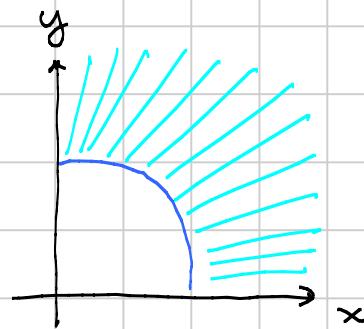
Impostando come insieme normale alla y

$$\begin{aligned} \iint_A \dots &= \int_0^{+\infty} dy \int_0^y dx \frac{x}{y^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^3+1} dy \int_0^y x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{y^3+1} dy \text{ e questo diverge per c.a. con } \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Esempio 5 $\iint_A \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy$

- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \geq 1\}$

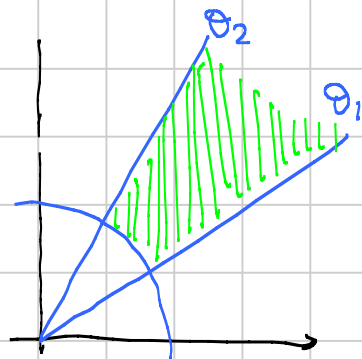
Brutale: $f(x,y) \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{r^2}$ ma questo diverge



Per farlo divergere serve stima con $\geq$, ma num. si può annullare

Idea: restringere zona di interazione, cercando di restare lontano dagli assi.

Scegliamo $0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$
ad esempio $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$ e consideriamo



L'insieme B definito in coord. polari da
 $\rho \geq 1$ e $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

Allora in B vale $xy = \rho^2 \cos \theta \sin \theta \geq m \rho^2$ con $m > 0$
(dove m è il minimo di $\cos \theta \sin \theta$ in $[\theta_1, \theta_2]$, e questo è strett. positivo perché... senti video :) e quindi

$$\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} \geq \frac{\arctan(m\rho^2)}{\rho^2} \geq \frac{\arctan(m)}{e^2} \quad \text{in } B$$

$\uparrow$
 $e \geq 1$
in B

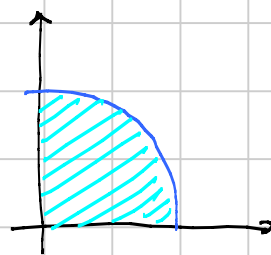
Ma allora

$$\iint_A \dots \geq \iint_B \dots \geq \iint_B \frac{\arctan(m)}{x^2+y^2} dx dy$$

$$= \int_1^{+\infty} d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\arctan(m)}{\rho^2} \cdot \rho = \arctan(m) (\theta_2 - \theta_1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho} d\rho$$

• $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$

Dire che $\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2+y^2}$ è inutile



perché a destra l'integrale divergerebbe, ed esagerata perché la stima $\arctan t \sim \frac{\pi}{2}$ va bene per t grandi e non per $t \sim 0$.

Per t piccoli è migliore $\arctan t \leq t$

Ma allora

$$\frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2}$$

↑
sempre vera nel
1° quadrante

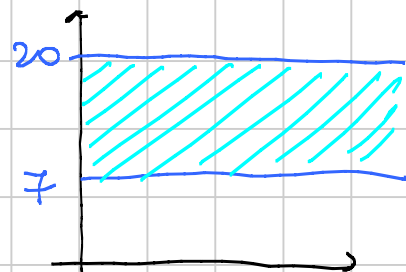
da cui

$$\iint_A \dots \leq \iint_A \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{\overbrace{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}^{\leq 1}}{\rho^2} \cdot \rho \leq \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho d\rho$$

e questo converge.

• $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 7 \leq y \leq 20\}$



L'idea è che converga

$$\iint_A \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \iint_A \frac{1}{x^2+49} dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} dx \int_7^{20} dy \frac{1}{x^2+49}$$

↑
num + grande
denom + piccolo

$$= \frac{13\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+49} dx$$

e questo converge per C.A. con $\frac{1}{x^2}$.

— 0 — 0 —