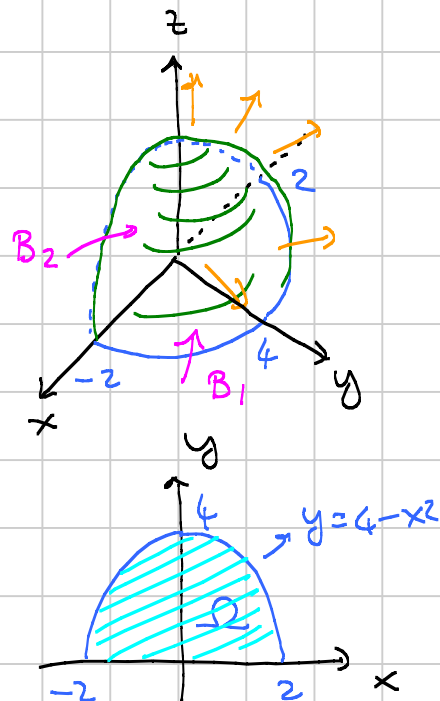


Esempio 1 → Superficie descritta da $x^2 + y + z = 4$, $y \geq 0, z \geq 0$
 → Normale che in $(0, 0, 4)$ punta verso la z positive
 → $\vec{E} = (x+y, -2y+z, x+z)$

Calcolare $\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$

Capiamo come è fatta S . Possiamo scriverla come $z = 4 - y - x^2$ sotto la condizione $y + x^2 \leq 4$ e $y \geq 0$, cioè $0 \leq y \leq 4 - x^2$

Moralmente: S è una cupola che si proietta su una base Ω



1° modo Posso parametrizzare S come $(u, v, 4 - v - u^2)$ con $(u, v) \in \Omega$
 Calcolo la normale e concludo.

2°-3° modo Essendo $\text{div } \vec{E} = 0$, posso invertire il rotore o cambiare superficie.
 Avvicinando per la seconda, dobbiamo considerare le "basi" S_1 sotto e S_2 a lato, orientate verso l'interno

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \int_{B_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma + \int_{B_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \\ &= \int_{B_1} \underset{0}{(x+z)} dx dy + \int_{B_2} \underset{0}{(-2y+z)} dx dz \end{aligned}$$

$$\int_{B_1} x \, dx \, dy = 0 \text{ per simmetria } (B_1 \text{ è } Q' \Omega \text{ di sopra})$$

Ora B_2 è $\{(x, z) : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - x^2\}$
(è come Ω , solo su un altro piano)

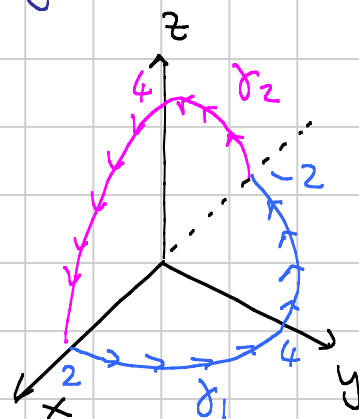
$$\int_{B_2} z \, dx \, dz = \int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} z \, dz = \text{si fa.}$$

Se avessi inventato il rotore, poi dovevo integrare $A \, dx + B \, dy + C \, dz$ su due curve γ_1 e γ_2 date da

$$\gamma_2(t) = (t, 0, 4 - t^2) \text{ con } t \in [-2, 2]$$

$$\gamma_1(t) = (t, 4 - t^2, 0) \text{ con } t \in [-2, 2]$$

INVERTITA DI VERSO



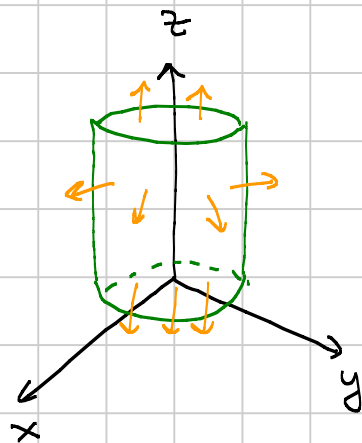
— o — o —

Esempio 2 → S cilindro come in figura

→ normale esterna

$$\rightarrow E = (y, x y, -x z)$$

Raggio base 1, altezza $0 \leq z \leq 2$



Calcolare : → il flusso uscente da tutto il cilindro

→ " " dalla sola sup. laterale

Indicato con C tutto il cilindro, per teo. divergenza

$$\int_{\partial C} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \iiint_C \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = 0 \quad \text{😊}$$

$$\text{" } \int_{\text{Sup lat}} \dots + \int_{\text{Base sotto}} \dots + \int_{\text{Base sopra}} \dots$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{sup lat}} \dots &= - \int_{\text{sotto}} \dots - \int_{\text{Sopra}} \dots \\
 &= - \int_{\text{sotto}} \langle (y, xy, 0), (0, 0, -1) \rangle dx dy \leadsto 0 \\
 &\quad - \int_{\text{Sopra}} \langle (y, xy, -2x), (0, 0, 1) \rangle dx dy \leadsto 0 \\
 &\quad \text{per simmetria}
 \end{aligned}$$

Oss. Volendo posso parametrizzare la sup. laterale come

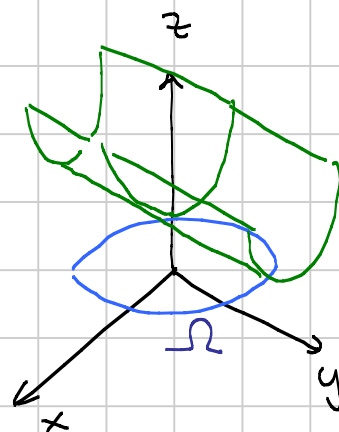
$$(\cos \theta, \sin \theta, w) \quad \text{con } (\theta, w) \in [0, 2\pi] \times [0, 2]$$

Esempio 3 $\rightarrow$ S descritta da $z - y^2 = 1, x^2 + y^2 \leq 1$
 $\rightarrow$ normale verso il basso
 $\rightarrow E = (x, 2y, z^2)$

Osservo che S è il grafico di $z = 1 + y^2$ sulla base descritta da $x^2 + y^2 \leq 1$.

Qui userei la definizione

$$\Phi(u, v) = (u, v, 1 + v^2) \quad \text{con } (u, v) \in \Omega$$



Calcolo la normale

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} \leadsto (0, -2v, 1)$$

$\uparrow$ è verso l'alto, quindi devo invertire i versi

$$\begin{aligned}
 \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \left[\underset{A \quad M_1}{u \cdot 0} + \underset{B \quad M_2}{2v(2v)} + \underset{C \quad M_3}{(1+v^2)^2 \cdot 1} \right] du dv \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{cambiato di segno} \\
 &= \text{si fa...}
 \end{aligned}$$

Esempio 4 S descritta da $4x^2 + y^2 e^x + z^2 = 1$ $y \geq 0$

Cerchiamo la normale che in $(0,0,1)$ punta verso le z positive

$$\vec{F} = (\sin y, x e^z, x z^2)$$

Vogliamo calcolare $\int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$

Osserviamo intanto che S è limitata. Infatti

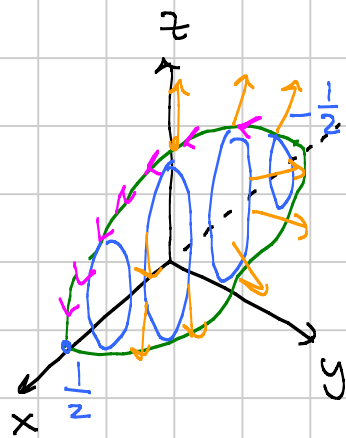
→ dall'eq. otteniamo subito $4x^2 \leq 1$ e $z^2 \leq 1$, quindi $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e $z \in [-1, 1]$. A questo punto $y^2 e^x \leq 1$, da cui

$y^2 \leq e^{-x} \leq e^{1/2}$ quando $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e quindi anche y è limitato

→ Fissato $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, si ottiene $e^x y^2 + z^2 \leq 1 - 4x^2$ e questa è una ellisse nelle variabili y e z .

Morale: le sezioni a x fisso sono ellissi

Di tutto questo prendiamo la parte con $y \geq 0$.



Come tentativo calcoliamo il rotore

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \sin y & x e^z & x z^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (x e^z, -z^2, e^z - \cos y) = \text{rot } \vec{F}$$

Posso parametrizzare la superficie, ma non sembra essere molto semplice.

Alternativa: applico STOKES e calcolo

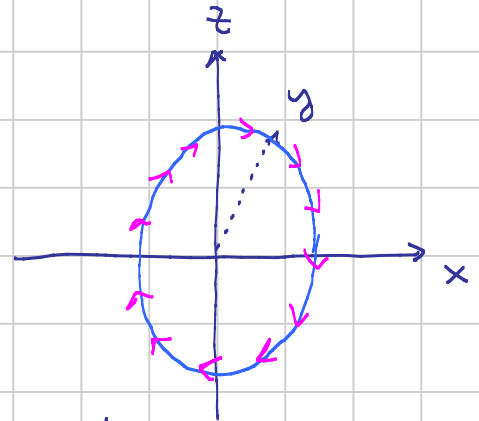
$$\int_{\gamma} A dx + B dy + C dz$$

γ ↑ bordo di S , che corrisponde a $y=0$

$\partial S =$ ellisse $4x^2 + z^2 = 1$, che parametrizzo come

$$\left(\frac{1}{2} \cos \theta, 0, \sin \theta \right) \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi]$$

Devo stabilire l'ORIENTAZIONE, quindi
va girata rispetto a sopra



$$\int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left[\underset{A}{0} \cdot \underset{\vec{x}(\theta)}{\left(-\frac{1}{2} \sin \theta\right)} + \underset{\vec{x}(\theta)}{\frac{1}{2} \cos \theta} \cdot \underset{\vec{e}_z(\theta)}{e^{\sin \theta}} \cdot \underset{\vec{y}(\theta)}{0} + \underset{\vec{x}(\theta)}{\frac{1}{2} \cos \theta} \sin^2 \theta \cdot \underset{\vec{z}(\theta)}{\cos \theta} \right] d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta) d\theta \quad \begin{matrix} y = 2\theta \\ dy = 2d\theta \end{matrix}$$

$$= -\frac{1}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2 y \cdot \frac{1}{2} dy$$

$$= -\frac{1}{16} \int_0^{4\pi} \sin^2 y dy = -\frac{\pi}{8}$$

— 0 — 0 —