

Area di sottoinsiemi del piano descritti mediante il bordo

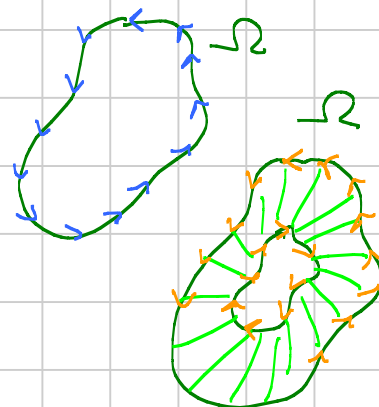
(Lec. 47-48 AMZ-14)

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x dy = \int_{\gamma} -y dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x dy - y dx)$$

curva o un sistema di curve
che percorre $\partial\Omega$ lasciando
 Ω alla sua sinistra

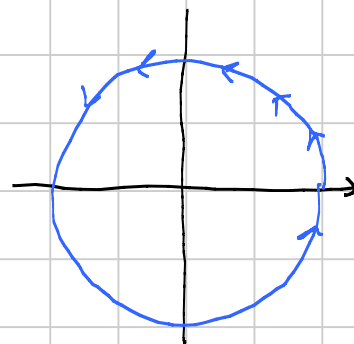
Si possono fare varianti più creative, tipo

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \int_{\gamma} \left(\frac{1}{3} x dy - \frac{2}{3} y dx \right) \\ &= \int_{\gamma} \frac{5}{4} x dy + \frac{1}{4} y dx \end{aligned}$$



Esempio 1 $(\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \int_{\gamma} x dy = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi \end{aligned}$$

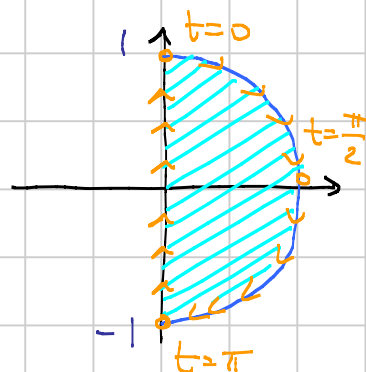


$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} \left(\frac{1}{2} x dy - \frac{1}{2} y dx \right) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \cos^2 t + \frac{1}{2} \sin^2 t \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 dt = \pi$$

Esempio 2 Semicerchio "destra" = Ω

Devo trovare una parametrizz. di $\partial\Omega$

$$\gamma_1(t) = (\sin t, \cos t) \quad t \in [0, \pi]$$



$$\gamma_2(t) = (0, t) \quad t \in [-1, 1]$$

$$\text{Area}(\Omega) = - \int_{\gamma_1} x \, dy - \int_{\gamma_2} x \, dy$$

(i segni - ci sono perché γ_1 e γ_2 vanno nel verso sbagliato)

$$= - \int_0^\pi \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{\sin t} (-\underset{\substack{\uparrow \\ y'(t)}}{\sin t}) \, dt - \int_{-1}^1 \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{0} \, dt = \int_0^\pi \sin^2 t \, dt = \frac{\pi}{2}$$

Potevo usare la formula con $y \, dx$, questa volta con segno +

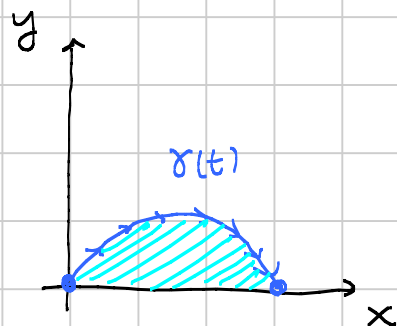
$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \int_{\gamma_1} y \, dx + \int_{\gamma_2} y \, dx = \int_0^\pi \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{\cos t} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x'(t)}}{\cos t} \, dt + \int_0^\pi \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{t} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ x'(t)}}{0} \, dt \\ &= \int_0^\pi \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Esempio 3 Ω limitato dalla curva $\gamma(t) = (t^3, t(1-t)) \quad t \in [0, 1]$ e dall'asse x

Osservazioni sulla curva

→ è semplice perché $x(t)$ è monot. ↗

→ $y(t) > 0$ per $t \in (0, 1)$



Serve una curva che percorra $\partial\Omega$ nel verso giusto, cioè prima il segmento $\gamma_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [0, 1]$ e poi $\gamma(t)$ in verso opposto

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma_1} x \, dy - \int_{\gamma} x \, dy = \int_{\gamma_1} t \cdot 0 \, dt - \int_0^1 t^3 (1-t) \, dt$$

mette a posto il verso

= si fa

oppure

$$\text{Area}(\Omega) = - \int_{\gamma_1} y \, dx + \int_{\gamma} y \, dx = \int_0^1 (t - t^2) 3t^2 \, dt$$

" su γ_1

sono lo stesso integr. Uno si ottiene dall'altro per punti!

Ulteriore alternativa: in questo caso il sostegno della curva si poteva esplicitare

$$\begin{aligned} x &= t^3 & \leadsto t &= \sqrt[3]{x} & \leadsto y &= \sqrt[3]{x} (1 - \sqrt[3]{x}) \\ y &= t(1-t) \end{aligned}$$

quindi potevo scrivere Ω come normale rispetto all'asse x

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt[3]{x} (1 - \sqrt[3]{x}) \}$$

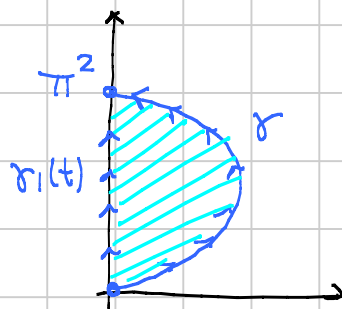
da cui
$$\text{Area}(\Omega) = \int_0^1 \sqrt[3]{x} (1 - \sqrt[3]{x}) dx$$

Ponendo $\sqrt[3]{x} = t$ diventa uno dei precedenti 😊

Esempio 4 Ω limitato da $(\sin t, t^2)$ con $t \in [0, \pi]$ e asse y

La curva è semplice perché $y(t)$ è $\nearrow$ in $[0, \pi]$

$$\gamma_1(t) = (0, t) \text{ con } t \in [0, \pi^2]$$



$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x dy - \int_{\gamma_1} x dy$$

$\uparrow$
 γ_1 ha il verso sbagliato

$$= \int_0^{\pi} \sin t \cdot 2t dt = \text{si fa con un passaggio per parti.}$$

Alternativa: Ω insieme è normale rispetto all'asse y e ha equazione

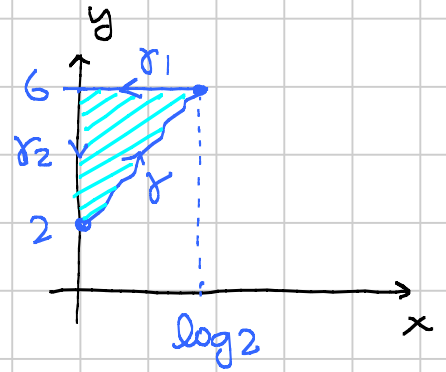
$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \pi^2, 0 \leq x \leq \sin \sqrt{y} \}$$

da cui
$$\text{Area}(\Omega) = \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{y}) dy$$

Ponendo $\sqrt{y} = t$ viene il precedente

Esempio 5 Ω limitato dalla curva $(\log t, t + t^2)$ con $t \in [1, 2]$
+ asse y + retta $y = 6$

La curva è semplice perché $x(t)$ e $y(t)$
sono $\nearrow$ in $[1, 2]$



$\gamma_1 = \{(t, 6) : t \in [0, \log 2]\}$ cambiata di verso

$\gamma_2 = \{(0, t) : t \in [2, 6]\}$ cambiata di verso

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \int_{\gamma} x dy - \int_{\gamma_1} x dy - \int_{\gamma_2} x dy \\ &= \int_1^2 \log t (1+2t) dt = \text{si fa facile per parti} \end{aligned}$$

Alternativa 1: $\text{Area}(\Omega) = - \int_{\gamma} y dx + \int_{\gamma_1} y dx + \int_{\gamma_2} y dx$

$$= - \int_1^2 (t+t^2) \frac{1}{t} dt + \int_0^{\log 2} 6 \cdot 1 dt = 6 \log 2$$

$\uparrow$ $y(t)$ $\uparrow$ $\dot{x}(t)$

= ancora + facile [Verificare che venga lo stesso !!]

Alternativa 2: posso descrivere Ω come insieme normale risp. x :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \log 2, e^x + e^{2x} \leq y \leq 6\}$$

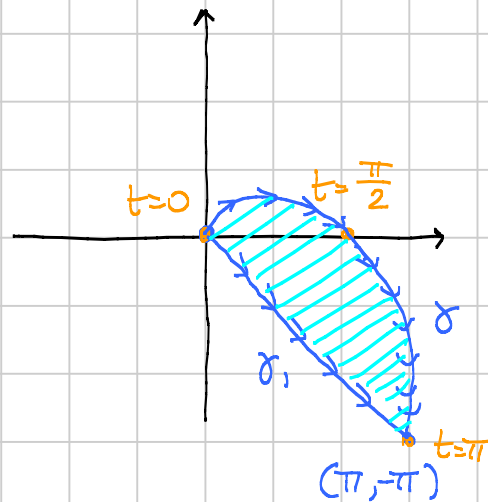
$$\text{Area}(\Omega) = \int_0^{\log 2} dx (6 - e^x - e^{2x}) = \text{si fa facilmente.}$$

Esempio 6 Ω limitato dalla curva $(t + \sin t, t \cos t)$ con $t \in [0, \pi]$
e dalla retta $x + y = 0$

La curva è semplice perché $t + \sin t$ è $\nearrow$
 Per $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ abbiamo $x(t) > 0$ e $y(t) > 0$

Per $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ abbiamo $x(t) > 0$ e $y(t) < 0$

Importante da dimostrare: La curva sta sempre sopra la retta



$$x(t) + y(t) \geq 0 \quad \begin{aligned} t + \sin t + t \cos t &\stackrel{?}{\geq} 0 \\ t(1 + \cos t) + \sin t &\stackrel{?}{\geq} 0 \\ \geq 0 \quad \geq 0 \text{ per } t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

vale il segno di = solo ai due estremi

Consideriamo $\sigma_1(t) = (t, -t)$ con $t \in [0, \pi]$. Allora

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \underbrace{- \int_{\sigma} x dy}_{\text{verso da cambiare}} + \int_{\sigma_1} x dy = \\ &= - \int_0^{\pi} (t + \sin t) (t \cos t)' dt + \int_0^{\pi} \underbrace{t}_{x(t)} \underbrace{(-1)}_{y'(t)} dt \\ &= - \int_0^{\pi} (t + \sin t) (\cos t - t \sin t) dt = \text{si fa} \end{aligned}$$

In alternativa: $\text{Area}(\Omega) = \int_{\sigma} y dx - \int_{\sigma_1} y dx$

$$= \int_0^{\pi} t \cos t (1 + \cos t) dt - \int_0^{\pi} (-t) 1 dt = \text{si fa}$$

oppure $\text{Area}(\Omega) = \int_{\sigma} \frac{1}{2} y dx - \frac{1}{2} x dy + \int_{\sigma_1} \frac{1}{2} x dy - \frac{1}{2} y dx$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \underbrace{(-t \cos t + t^2 \sin t - \sin t \cos t + t \sin^2 t)}_{\text{si fa}} + \underbrace{t \cos t + t \cos^2 t}_{\text{si fa}} dt = \text{si fa}$$