

GRADIENTE, DIVERGENZA, LAPLACIANO, ROTORE (AM2-14 - Lec 46)

$$f(x, y, z) \quad \vec{E}(x, y, z) = (A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z))$$

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z)$$

$$\operatorname{div} \vec{E}(x, y, z) = A_x + B_y + C_z$$

$$\Delta f(x, y, z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(x, y, z) = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

Proprietà base di composizione

$$\textcircled{1} \operatorname{rot}(\nabla f) = 0$$

$$\operatorname{rot}(f_x, f_y, f_z) = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = \vec{0}$$

$C_y - B_z$

Vale il viceversa se la zona di definizione è sempl. connessa
(ad esempio stellata)

$$\operatorname{rot}(A, B, C) = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} C_y &= B_z \\ A_z &= C_x \\ B_x &= A_y \end{aligned} \Leftrightarrow \text{La forma diff.} \\ \omega = A dx + B dy + C dz \\ \text{è chiusa}$$

$$\textcircled{2} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E}) = 0$$

$$\operatorname{div}(C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$= \cancel{C_y}_x - \cancel{B_z}_x + \cancel{A_z}_y - \cancel{C_x}_y + \cancel{B_x}_z - \cancel{A_y}_z = 0$$

Meno facile (fatto misterioso): vale il viceversa se la zona di definizione è stellata.

Quindi: in un insieme dello spazio stellato (ad esempio tutto $\mathbb{R}^3$ o un semispazio) un vettore a divergenza nulla è il rotore di qualcosa.

$$\textcircled{3} \operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$$

$$\operatorname{div}(f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$$

$$\textcircled{4} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) = \nabla(\operatorname{div} \vec{E}) - (\Delta A, \Delta B, \Delta C) \quad \sim \Delta(\vec{E})$$

$$\operatorname{rot}(C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$= ((B_x - A_y)_y - (A_z - C_x)_z, (C_y - B_z)_z - (B_x - A_y)_x, (A_z - C_x)_x - (C_y - B_z)_y)$$

$$= (B_{xy} - \cancel{A_{yy}} - \cancel{A_{zz}} + C_{xz}, C_{yz} - B_{zz} - B_{xx} + A_{yx}, A_{zx} - C_{xx} - C_{yy} + B_{zy})$$

$$+ A_{xx} - \cancel{A_{xx}} \quad + B_{yy} - B_{yy} \quad + C_{zz} - C_{zz}$$

$$= (-\Delta A + (\operatorname{div} \vec{E})_x, -\Delta B + (\operatorname{div} \vec{E})_y, -\Delta C + (\operatorname{div} \vec{E})_z)$$

$$B_{xy} + C_{xz} + A_{xx} = (A_x + B_y + C_z)_x = (\operatorname{div} E)_x$$

$$= -(\Delta A, \Delta B, \Delta C) + \nabla(\operatorname{div} \vec{E})$$

Esercizi vari

funzione scalare

1 Calcolare $\text{div}(\underbrace{f}_{\text{funzione scalare}} \underbrace{\vec{E}}_{\text{vettore}})$ $= f \text{div} \vec{E} + \langle \nabla f, \vec{E} \rangle$

$$\vec{E} = (A, B, C)$$

$$\text{div}(fA, fB, fC) = (fA)_x + (fB)_y + (fC)_z$$

$$= \boxed{f_x A} + f A_x + \boxed{f_y B} + f B_y + \boxed{f_z C} + f C_z$$

$$= \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + f \text{div} \vec{E}$$

2 Calcolare $\text{rot}(f\vec{E}) = f \text{rot}(\vec{E}) + \nabla f \wedge \vec{E}$
↑ prodotto vettore

$$\text{rot} \vec{E} = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y) = \text{rot}(A, B, C)$$

$$\text{rot}(fA, fB, fC) =$$

$$= ((fC)_y - (fB)_z, (fA)_z - (fC)_x, (fB)_x - (fA)_y)$$

$$= (f_y C + f C_y - f_z B - f B_z, f_z A + f A_z - f_x C - f C_x, f_x B + f B_x - f_y A - f A_y)$$

$$= f \text{rot} \vec{E} + \underbrace{(f_y C - f_z B, f_z A - f_x C, f_x B - f_y A)}$$

chi è questo? È il vettore prodotto
dalla formula misteriosa a
partire da ∇f e $\vec{E}$
e questo per i fisici è il
prodotto vettore

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ f_x & f_y & f_z \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

$$\boxed{3} \quad \Delta(fg) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle$$

$$\Delta(fg) = (fg)_{xx} + (fg)_{yy} + (fg)_{zz}$$

$$= (f_x g + f g_x)_x + (f_y g + f g_y)_y + (f_z g + f g_z)_z$$

$$= f_{xx} g + 2f_x g_x + f g_{xx} + \\ f_{yy} g + 2f_y g_y + f g_{yy} + \\ f_{zz} g + 2f_z g_z + f g_{zz}$$

$\boxed{4}$ Osserviamo che certe composizioni non hanno senso, ad esempio

$$\nabla \vec{E}, \quad \Delta \vec{E}, \quad \operatorname{div} f, \quad \operatorname{rot} f, \quad \operatorname{rot}(\operatorname{div} \vec{E})$$

↑
valendo si
interpreta

$$\nabla(\operatorname{rot} \vec{E}), \quad \operatorname{div}(\Delta f), \dots$$

INVERSIONE DEL ROTORE Dato $\vec{E}$ con $\operatorname{div} \vec{E} = 0$,
trovare $\vec{F}$ tale che $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{E}$

Esempio $\vec{E} = (x + y^2, y + zx, -2z + x^2)$

Vediamo che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ ($1+1-2=0$), quindi $\vec{F}$ esiste dal momento che $\mathbb{R}^3$ è stellato.

Cerco A, B, C tali che (Pensando che $\vec{F} = (A, B, C)$)

$$\begin{cases} C_y - B_z = x + y^2 \\ A_z - C_x = y + zx \\ B_x - A_y = -2z + x^2 \end{cases}$$

Primo passo: posso supporre che una componente a scelta sia 0.

Diciamo che poniamo $B \equiv 0$

Il sistema diventa

$$C_y = x + y^2$$

$$\leadsto C = xy + \frac{1}{3}y^3 + \psi(x, z)$$

$$A_z - C_x = y + zx$$

$$-A_y = -2z + x^2 \leadsto A_y = 2z - x^2 \leadsto A = 2zy - x^2y + \phi(x, z)$$

Secondo passo: sostituisco A e C nella restante equazione:

$$A_z - C_x = \cancel{2y} - \phi_z - \cancel{y} - \psi_x = y + zx$$

DEVE SUCCEDERE che se ne vanno le y. Questo accade se il campo dato all'inizio (ora a dx nel sistema) ha $\text{div} = 0$

Quindi abbiamo da risolvere $\phi_z + \psi_x = -zx$

Terzo passo: pongo uguale a 0 una delle due, ad esempio $\phi \equiv 0$

Resta

$$\psi_x = -zx \leadsto \psi = -\frac{1}{2}zx^2$$

Quindi una possibilità per il campo richiesto è

$$(2zy - x^2y, 0, xy + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}zx^2) \quad [\text{Verifica !!!}]$$

$$(C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y) = (x + y^2, 2y - y - zx, -2z + x^2)$$



Oss. Posso fare in modo che la seconda componente sia $\sin(xz) + \cos(y)$

OSSERVARE CHE

$$\uparrow \text{rot}(\nabla f) = 0$$

Sì!! Basta che aggiunga alla risposta precedente il ∇f che abbia come seconda componente quella data!! Quindi aggiungo

$$\nabla(y \sin(xz) + \sin y) = (yz \cos(xz), \sin(xz) + \cos y, yx \cos(xz))$$

— 0 — 0 —