

Ancora solidi di rotazione

Esempio 1 Calcolare il baricentro di un cono come solido e della sua sup. laterale (come superficie)

L'eq. della retta che ruota è $z = \frac{R}{r} (r-y)$

Volume = $\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot R$ (dalla geometria elem.)

Facciamo i conti

$$\iiint_{\text{cono}} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^R dz \, \text{Area}(S_z)$$

↑
cerchio di raggio
 $\frac{r(R-z)}{R}$

$$= \pi \frac{r^2}{R^2} \int_0^R (R-z)^2 dz = \frac{\pi r^2}{R^2} \int_0^R t^2 dt = \frac{\pi r^2}{R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 = \dots$$

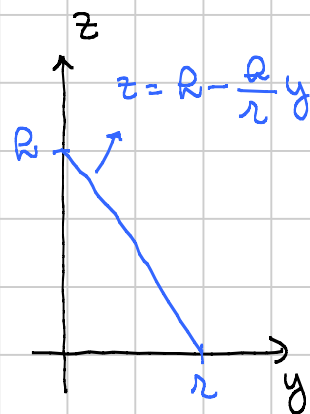
↑
 $R-z=t$

$$\begin{aligned} \iiint_{\text{cono}} z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz = \frac{\pi r^2}{R^2} \int_0^R z (R-z)^2 dz \\ &= \frac{\pi r^2}{R^2} \int_0^R z^2 (R-z) dz = \frac{\pi r^2}{R^2} \left[\frac{1}{3} R z^3 - \frac{1}{4} z^4 \right]_0^R \\ &= \frac{\pi r^2}{R^2} \frac{1}{12} R^4 = \frac{1}{12} \pi r^2 R^2 \end{aligned}$$

Quindi

$$z_G = \frac{\frac{1}{12} \pi r^2 R^2}{\frac{1}{3} \pi r^2 R} = \frac{1}{4} R$$

$$x_G = y_G = 0$$



Oss. geometrica $\rightarrow$ Il baricentro di un segm. verticale sta a $\frac{1}{2}$ altezza



$\rightarrow$ Il baricentro di un triangolo sta ad $\frac{1}{3}$ altezza



$\rightarrow$ Il baricentro di un cono (o piramide) sta ad $\frac{1}{4}$ altezza.

$$\text{Area superficie} = 2\pi y_G \cdot \text{lungh. segmento}$$

$\uparrow$ Guldino $\uparrow$ $\frac{r}{2}$



$$= \pi r \sqrt{r^2 + R^2}$$

$$\int_{\text{Sup. cono}} z \, d\sigma = \int_a^b z(t) \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, dt$$

Intanto occorre parametrizzare il segmento

$$(y(t), z(t)) = (r - rt, Rt) \quad t \in [0, 1]$$

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \text{es. precedenti} = y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \cdot 2\pi$$

$\uparrow$
già integrato
in 8

$$= 2\pi \int_0^1 Rt (r - rt) \sqrt{r^2 + R^2} \, dt$$

$$= 2\pi R r \sqrt{r^2 + R^2} \int_0^1 t(1-t) \, dt = \pi R r \sqrt{r^2 + R^2} \cdot \frac{1}{3}$$
$$\left[\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1$$

Dividendo

$$z_G = \frac{1}{3} R$$

$$x_G = y_G = 0$$

Oss. Come scrivo una param. della sup. Portinale del cono?

$$(y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))$$

$$= (r(1-t) \cos \theta, r(1-t) \sin \theta, 2t)$$

Esempio 2 Supponiamo di ruotare lo stesso triangolo, ma solo di $\frac{\pi}{3}$ e non di 2π .

Dove viene a trovarsi il baricentro del nuovo solido.

Supponiamo la rotazione verso la x negative

Dal punto di vista della z non cambia nulla (volume e $\iiint z$ sono entrambi divisi per 6).

Se vogliamo calcolare x_G serve

$$\iiint_{\text{cono}} x \, dx \, dy \, dz = \text{coord. cilindriche}$$

$$\dots \quad x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad z$$

$$\rho \in [0, r]$$

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$$

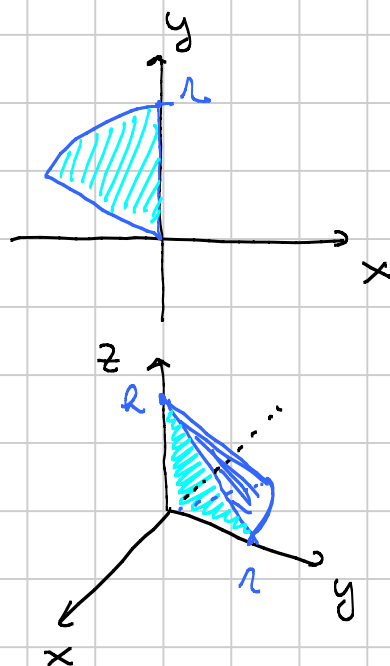
$$= \int_0^r d\rho \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} d\theta \int_0^{\frac{r}{2}(1-\rho)} \rho \cos \theta \cdot \rho \, dz$$

$\uparrow$ jacobiano

$$0 \leq z \leq \frac{r}{2}(1-\rho)$$

$$= \int_0^r \rho^2 \frac{r}{2}(1-\rho) d\rho \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos \theta d\theta = \text{si fa facile.}$$

Stessa cosa se volevamo l'integrale di y .



Stessa cosa per la superficie

$$\int_{\text{sup cono}} x \, d\sigma =$$

Scriviamo la parametrizzazione

$$(r(1-t)\cos\theta, r(1-t)\sin\theta, Rt) \quad t \in [0,1], \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$$

$$= \int_0^1 dt \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} d\theta \underbrace{r(1-t)\cos\theta}_{x(t,\theta)} \underbrace{\frac{r(1-t)\sqrt{r^2+R^2}}{\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}}}_{d\sigma}$$

$$= r^2 \sqrt{r^2+R^2} \int_0^1 (1-t)^2 dt \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos\theta \, d\theta = \text{si fa}$$

Esempio 3 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

Ruotiamo intorno all'asse y di $\frac{3\pi}{2}$ andando verso le z negative

(Ruotiamo "tutto sotto" e poi ancora "metà sopra")

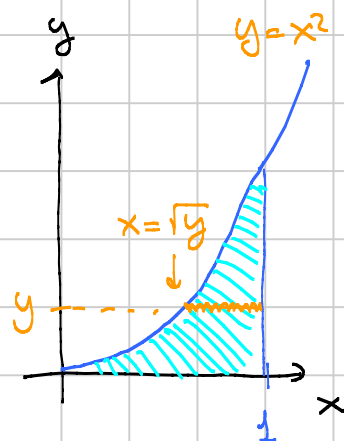
Vogliamo volume e coordinate baricentro

$$\text{Volume} = \iiint_{\text{solido}} 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{sez. asse } y}}{=} \int_0^1 dy \, \text{Area}(S_y)$$

corona circolare con raggio esterno 1 e raggio interno $\sqrt{y}$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{noi riteniamo solo } \frac{3}{4} \text{ della corona}}}{=} \pi \int_0^1 (1-y) \frac{3}{4} dy = \text{si fa.}$$



Se voglio la coordinata y del baricentro devo calcolare

$$\iiint_{\text{solido}} y \, dx \, dy \, dz = \dots = \frac{3}{4} \pi \int_0^1 (1-y)y \, dy$$

Se voglio la coordinata x devo calcolare

$$\iiint_{\text{solido}} x \, dx \, dy \, dz$$

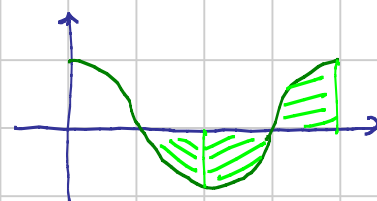
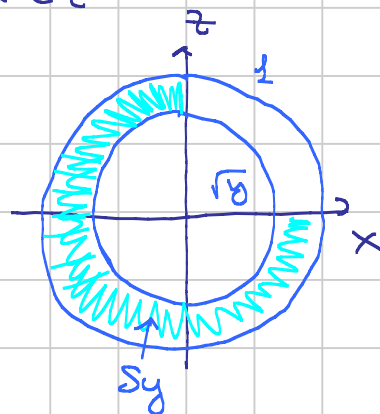
Qui servono coord. cilindriche nelle variabili x e z

$$= \int_0^1 dy \iint_{S_y} x \, dx \, dz$$

$$= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \rho \, d\rho \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \underbrace{\rho \cos \theta}_x \cdot \underbrace{\rho}_y \, d\theta$$

$$= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \rho^2 \, d\rho \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos \theta \, d\theta}_{-1}$$

$$= - \int_0^1 dy \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_{\rho=\sqrt{y}}^{\rho=1} = -\frac{1}{3} \int_0^1 (1-y^{3/2}) \, dy = \text{si fa}$$



Se voglio la coordinata z devo mettere $\sin \theta$ invece di $\cos \theta$.

Come posso parametrizzare la superficie descritta dalla rotazione della parabola?

→ La parabola è $(\underbrace{t}_x, \underbrace{t^2}_y)$ con $t \in [0, 1]$

→ La sup. diventa $(t \cos \theta, t^2, t \sin \theta)$
con $t \in [0, 1]$ e $\theta \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$.

Per esercizio calcolare $(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2)^{1/2} = t \sqrt{1 + 4t^2}$.