

Esercizi sui solidi di rotazione

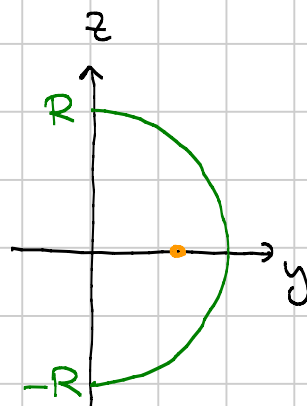
Esempio 1 Superficie della sfera

$$\text{Area (Sfera)} = 2\pi \int_{\gamma} y \, ds$$

$$\gamma(t) = (R \sin t, R \cos t) \quad \text{con } t \in [0, \pi]$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \underset{\uparrow y'(t)}{R \sin t} \sqrt{\underset{\uparrow \dot{\gamma}(t)^2}{R^2 \cos^2 t} + \underset{\uparrow \dot{z}(t)^2}{R^2 \sin^2 t}} \, dt$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin t \, dt = 4\pi R^2$$



2° modo, in realtà uguale

$$\text{Area}(S) = 2\pi \underset{\uparrow \frac{2}{\pi} R}{y_G} \cdot \underset{\uparrow \pi}{\text{Length}(\gamma)} = 4\pi R^2$$

↑ vedi qualche ser. precedente

3° modo: parametrizzando con le sferiche

$$\Phi(\theta, \varphi) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi) \quad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi] \\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array}$$

$$\Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \theta & R \cos \varphi \cos \theta & 0 \\ -R \sin \varphi \cos \theta & -R \sin \varphi \sin \theta & R \cos \varphi \end{pmatrix}$$

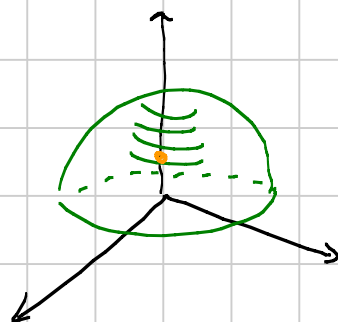
$$(M_1, M_2, M_3) = (R^2 \cos^2 \varphi \cos \theta, R^2 \cos^2 \varphi \sin \theta, R^2 \cos \varphi \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Area} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \quad R^2 \sqrt{\cos^4\varphi + \cos^2\varphi \sin^2\varphi} \\
 &= R^2 \cdot 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = 4\pi R^2 \quad \text{😊}
 \end{aligned}$$

Da ricordare: $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = R^2 \cos\varphi$

Esempio 2 Baricentro di una semisfera, intesa come superficie.

La definizione è "la solita"



$$x_G = \frac{1}{\text{Area}} \int_S x \, d\sigma, \quad y_G = \dots, \quad z_G = \dots$$

Per ragioni di simmetria è evidente che $x_G = y_G = 0$, cioè sta sull'asse z . Occorre calcolare z_G . Sarà sopra o sotto la metà?

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{semisfera}} z \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \quad \underset{\substack{\uparrow \\ z}}{\sin\varphi} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}}{\cos\varphi} \\
 &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \pi [\sin^2\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi
 \end{aligned}$$

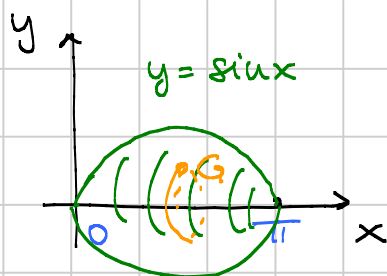
Quindi

$$z_G = \frac{1}{\text{area}} \int z \, d\sigma = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \quad \text{😊}$$

Esempio 3 Calcolare $\int_{\text{semisfera}} x^2 \, d\sigma$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \quad \underbrace{\cos^2\varphi \cos^2\theta}_{x^2} \underbrace{\cos\varphi}_{\sqrt{\dots}} = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta}_{\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \, d\varphi}_{\text{si fa}}$$

Esempio 4 Consideriamo il solido ottenuto ruotendo la figura intorno all'asse x .
Calcolare volume e area superficie



1° modo Volume = $\pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \pi^2$
 $\uparrow$
 sezioni rispetto asse x , oppure formula

Superficie = $2\pi \int_0^{\pi} \sin x \times \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx$ = con un po' di fatica si fa

2° modo Guldino per il volume. Devo calcolare il baricentro della figura. È chiaro che $x_G = \frac{\pi}{2}$ per simmetria

$$\iint_F y \, dx \, dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}$$

$$y_G = \frac{\frac{\pi}{4}}{\text{Area}(F)} = \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Volume} = 2\pi \cdot y_G \cdot \text{Area} = 2\pi \cdot \frac{\pi}{8} \cdot 2 = \frac{\pi^2}{2} \quad \text{☺}$$

Oss. Ho prima diviso e poi moltiplicato per l'area

Per la superficie potevo fare lo stesso conto.

Scrivere l'equazione del solido ottenuto.

Curva $\leadsto y = \sin x \quad x \in [0, \pi]$

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \sin x$$

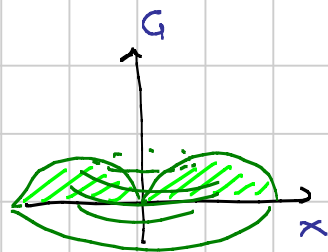
$\uparrow$
Distanza dall'asse x

$$\leadsto y^2 + z^2 = \sin^2 x$$

$$x \in [0, \pi]$$

Esempio 5 Stessa cosa ruotando intorno all'asse y

$$\text{Volume} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Guldinus}}}{2\pi} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simmetria}}}{G} \cdot \text{Area} = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 2\pi^2$$



$$\text{Superficie} = 2\pi \times G \cdot \text{lunghezza curva}$$

$$= 2\pi \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simmetria}}}{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = \text{non so se si fa.}$$

Achtung! Il baricentro della curva e della figura sono diversi, ma hanno la stessa coordinata x .

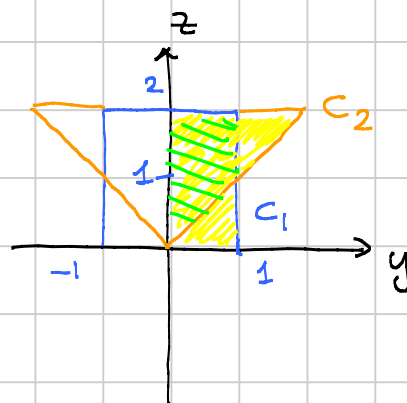
Esempio 6

$$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 2]\}$$

$$C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, z \in [0, 2]\}$$

Calcolare volume e sup e coord. baricentro di $C_1 \cap C_2$ e $C_1 \cup C_2$

C_1 = cilindro C_2 = cono



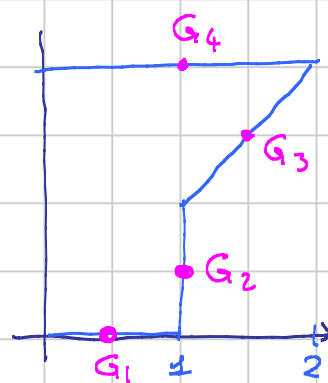
$\text{Vol}(C_1 \cup C_2)$ = sezioni lungo asse z

$$= \int_0^1 dz \text{ area}(S_z) + \int_1^2 dz \text{ area}(S_z)$$

$$= \pi \int_0^1 dz + \pi \int_1^2 z^2 dz = \text{si fa}$$

$$\text{Vol}(C_1 \cap C_2) = \pi \int_0^1 z^2 dz + \pi \int_1^2 1 dz = \text{si fa}$$

Area Sup $(C_1 \cup C_2)$ = unione di 4 pezzi che si ottengono ruotando 4 segmenti

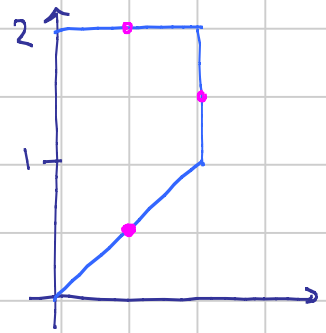


$$= 2\pi \{ y_{G_1} \cdot l_1 + y_{G_2} \cdot l_2 + y_{G_3} \cdot l_3 + y_{G_4} \cdot l_4 \}$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 2 \right\} = \text{si fa}$$

$$\text{Area}_{\text{sup}}(C_1 \cap C_2) =$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{2} + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right\}$$



L'unica coordinata non banale del baricentro è la z , che richiede di integrare z sul solido. Ad esempio

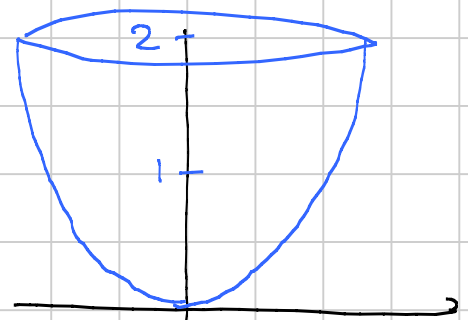
$$\iiint_{C_1 \cap C_2} z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \, z \, \pi z^2 + \int_1^2 dz \, z \cdot \pi = \text{si fa.}$$

$$\text{Aggiungiamo } P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}$$

Volume di $C_2 \cap P$

$$\text{Vol} = \pi \int_0^1 z^2 \, dz + \pi \int_1^2 z \, dz$$

$\uparrow$
 la sezione ha
 raggio $\sqrt{z}$



La superficie è fatta da 3 pezzi

$$\text{"pezzo di cono"} = 2\pi y_G \cdot \text{lung} = 2\pi \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{"base in alto"} = \pi (\sqrt{2})^2 = 2\pi$$

$$\begin{aligned} \text{"pezzo di paraboloide"} &= 2\pi \int_1^2 \varphi(z) \sqrt{1 + \dot{\varphi}(z)^2} \, dz && \text{pensando all'eq. } y = \sqrt{z} \\ &= 2\pi \int_1^2 \sqrt{z} \sqrt{1 + \frac{1}{4z}} \, dz = 2\pi \int_1^2 \frac{\sqrt{4z+1}}{2\sqrt{z}} \, dz = \pi \int_1^2 \sqrt{4z+1} \, dz \\ &= \text{si fa facile} \end{aligned}$$

