

Superfici e integrali superficiali

Presentazione di una superficie:

- implicita
- cartesiana
- parametrica

- Piano tangente
- Vettore normale

Area di una superficie : → come NON si può definire
 → come si può definire
 → Formula per il calcolo nel caso parametrico

Integrali superficiali : → definizione
 → formula per il calcolo

Esempio 1 $\Phi(u, v) = (\overset{\text{"}x(u,v)\text{"}}{u^2 - v}, \overset{\text{"}y(u,v)\text{"}}{2u + v}, \overset{\text{"}z(u,v)\text{"}}{v^2 + uv})$
 $u \in [-1, 1] \quad v \in [-1, 2]$

$$J\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & -2 & v \\ -1 & 1 & 2v + u \end{pmatrix} \begin{matrix} \phi_u \\ \phi_v \end{matrix}$$

Consideriamo il punto $(0, 0, 0)$ della superficie, che corrisponde a $u=0$ e $v=0$.

Il piano tangente alla sup in $(0, 0, 0)$ è lo span di $\phi_u(0, 0)$ e $\phi_v(0, 0)$

Nel vostro caso $\text{span}((0,2,0), (-1,1,0)) = t(0,2,0) + s(-1,1,0)$

Se voglio l'eq. del piano

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0,0,2) \rightsquigarrow \boxed{(0,0,1)} \text{ è un vettore, anzi} \\ \text{vettore, } \perp \text{ al piano.}$$

Il piano tangente è $\boxed{z=0}$.

Cambiamo p.to $u=1$ e $v=1$ producono $(0,3,2)$.

Il piano tangente in $(0,3,2)$ è

$$(0,3,2) + t(2,2,1) + s(-1,1,3)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{(5, -7, 4)} \quad [\text{Verifica ortogonalità}]$$

↑ vettore $\perp$ alla superficie

$$\boxed{5x - 7y + 4z = -13} \text{ piano tangente.}$$

Per calcolare l'area occorre fare

$$\iint_{\text{sp. parametri}} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv = (*)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 2u & 2 & v \\ -1 & 1 & 2u+v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4u+v & -4u^2-2uv+v & 2u+2 \end{pmatrix}$$

$M_1 \qquad M_2 \qquad M_3$

$$* = \int_{-1}^1 du \int_{-1}^2 dv \sqrt{(4u+v)^2 + (-4u^2-2uv+v)^2 + (2u+2)^2}$$

= di solito sono conti duri...

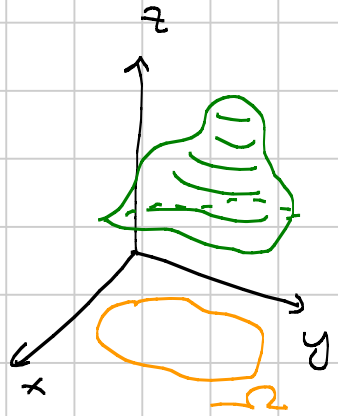
Caso cartesiano speciale : La sup. è un grafico $z = f(x, y)$
 con $(x, y) \in \text{base} = \Omega$

Parametrizz. : $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_u(u, v) \\ 0 & 1 & f_v(u, v) \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (-f_u(u, v), -f_v(u, v), 1)$$

$$\text{Area} = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, du \, dv$$



Formula per integrali superficiali

$$\int_S \underbrace{f(x, y, z)}_{\substack{\uparrow \\ \text{funzione di 3 variabili}}} \underbrace{d\sigma}_{\substack{\uparrow \\ \text{superficie}}} \leftarrow \text{integrale superficiale}$$

$$\int_S f(x, y, z) \, d\sigma = \iint_{\Omega} f(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv$$

dove si intende che la sup è $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

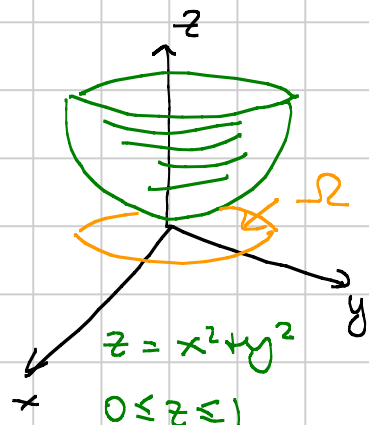
Esempio di uso calcolo

$$\int_S (x + y^2) \, d\sigma$$

" 0 per simmetria

$$\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$



$$J\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (-2u, -2v, 1)$$

$$\int_S y^2 d\sigma = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \underbrace{v^2}_{\substack{\uparrow \\ y^2}} \underbrace{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}_{\substack{\uparrow \\ \sqrt{\dots}}} du dv = \text{volumeo fattibile}$$

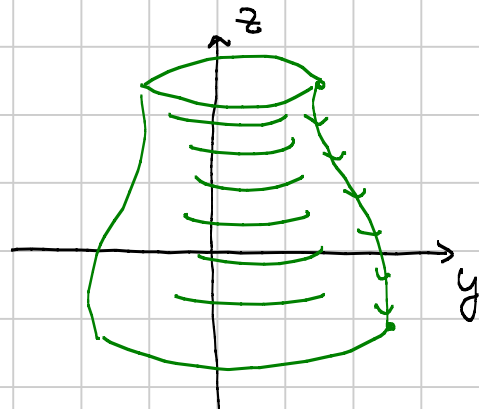
Superfici di rotazioni

Consideriamo una curva

$$\gamma(t) = (y(t), z(t)) \text{ con } t \in [a, b]$$

a valori nel piano yz .

Ruotando intorno all'asse z descrive una superficie di parametrizzazione



$$\phi(t, \theta) = (\underbrace{y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta}_{\text{circonferenza di raggio } y(t)}, z(t))$$

$$t \in [a, b]$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$\uparrow$
se la rotazione
è completa

Calcoliamo

$$J\phi(t, \theta) = \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \cos \theta & \dot{y}(t) \sin \theta & \dot{z}(t) \\ -y(t) \sin \theta & y(t) \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (-\dot{z}(t)y(t) \cos \theta, -\dot{z}(t)y(t) \sin \theta, y(t)\dot{y}(t))$$

$\uparrow$
[conferma dopo video]

$$\text{Area} = \int_a^b dt \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{y(t)^2 \dot{z}(t)^2 + y(t)^2 \dot{y}(t)^2}$$

$$= 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

$\uparrow$ vale se $y(t) \geq 0$ sempre

Formula:

$$\text{Area} = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Quello a dx è un integrale curvilineo

$$\int_a^b y(t) \sqrt{\dots} dt = \int_{\gamma} y ds$$

$$\text{Area} = 2\pi \int_{\gamma} y ds$$

Se moltiplico e divido per la lunghezza di γ trovo

$$\text{Area} = 2\pi y_G \cdot \text{lunga } \gamma$$

Teorema di Guldinus per
le aree delle sup. di
rotazione

lunga. circ. percorsa
dal baricentro durante la rotazione.

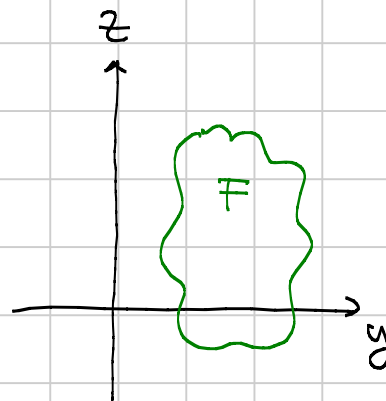
lunga. curva
che ruota

Volume solido di rotazione

Rappresentazione del solido

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in F\} = V$$

↑
distanza
dall'asse z



$$\begin{aligned} \text{Vol} &= \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \iint_{(r,z) \in F} \rho \, dz \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \rho \\ &= 2\pi \iint_F \rho \, \rho \, dz \end{aligned}$$

↑
J delle coord.
cilindriche

Formula

$$\text{Vol}(V) = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz$$

Se moltiplico e divido per l'area di F trovo

$$\text{Vol}(V) = 2\pi y_G \cdot \text{Area}(F)$$

↑
coord. y del
baricentro della figura
che ruota

Teorema di Guldino per
il volume di un
solido di rotazione

Oss. Nel caso in cui la curva sia del tipo
cartesiano

$$\text{Area}(\text{Sup}) = 2\pi \int_a^b \varphi(z) \sqrt{1 + \varphi'(z)^2} \, dz$$

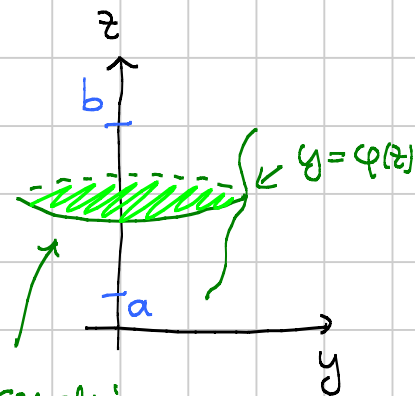
$$\text{Vol}(\text{solido}) = 2\pi \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} y \, dy$$

$$= \pi \int_a^b \varphi(z)^2 \, dz$$

↑

Qui si arrivava anche calcolando il volume
per sezioni

— o — o —



S_z = cerchio
di raggio $\varphi(z)$