

### Lunghezza di una curva e integrali curvilinei

Cose da ripassare

- Def. Lunghezza (sup. Lunghe. poligonali)
- Esempio di curva di Lunghe. infinita
- Formula per il calcolo nel caso di curve  $C^1$

$$\text{Lunghe}(\gamma) = \int_a^b \underbrace{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}_{\text{speed}} dt$$

→ Def. di integrale curvilineo (integrale di una funzione lungo una curva, da non confondere mai con quello di una forma diff.)

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \underbrace{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}_{ds} dt$$

curva  $\gamma$  a valori in  $\mathbb{R}^2$       funzione di 2 variabili      dice che si tratta di integrale curvilineo

→ Significato geometrico (interpretazione come profilo altimetrico della tappa)

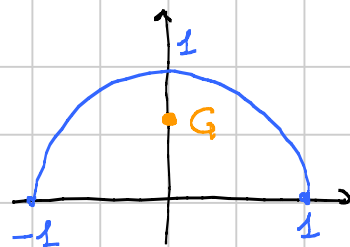
→ Def. di baricentro di una curva  $G = (x_G, y_G)$  con

$$x_G = \frac{1}{\text{Lunghe}(\gamma)} \int_{\gamma} x ds, \quad y_G = \frac{1}{\text{Lunghe}(\gamma)} \int_{\gamma} y ds$$

→ Se percorro una curva in verso opposto, l'integrale di una forma diff. cambia segno, l'integrale lungo la curva di una funzione NO.

Esempio 1 Calcolare il baricentro di una semicirconfenza (intesa come curva)

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$



$\text{Lunghe}(\gamma) = \pi$  dalla geometria elementare, ma anche dalla formula

$$\text{Lunghe}(\gamma) = \int_0^\pi \sqrt{\underbrace{\sin^2(t)}_{\dot{x}(t)^2} + \underbrace{\cos^2(t)}_{\dot{y}(t)^2}} dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi \quad \odot$$

Ragioni di simmetria inducono a dire che  $x_G = 0$

$$\int_\gamma y ds = \int_0^\pi \sin t \sqrt{\underbrace{\sin^2 t}_{\dot{x}^2} + \underbrace{\cos^2 t}_{\dot{y}^2}} dt = \int_0^\pi \sin t dt = 2$$

quindi

$$y_G = \frac{2}{\pi} > \frac{1}{2}$$

(invece il baricentro della semicirc. come figura piana stava sotto)

Casi speciali di formula per la lunghezza

1 Curva cartesiana

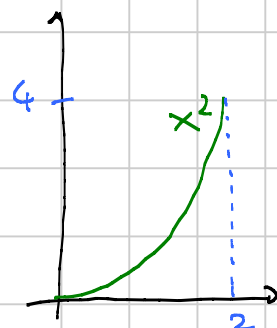
$$\gamma(t) = (t, f(t)) \quad \text{con } t \in [a, b]$$

$$\text{Lunghe}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \underbrace{f'(t)^2}_{\dot{y}(t)^2}} dt$$



Esempio Lunghe. tratto parabola

$$= \int_0^2 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \text{con un po' di fatica si fa}$$



2) Curva in coordinate polari : invece di rappresentarla come  $(x(t), y(t))$ , la rappresentiamo come  $\rho(t), \theta(t)$ , con  $t \in [a, b]$

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \quad y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta + \rho (-\sin \theta) \dot{\theta} \quad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta$$

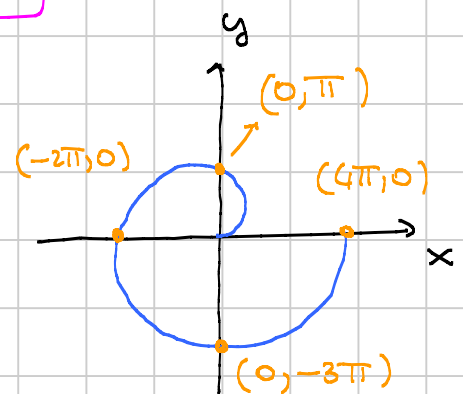
$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{\rho}^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \\ &\quad + \dot{\rho}^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \\ &= \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2 \dot{\theta}(t)^2} dt$$

Esempio  $\rho = 2\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

La parametr. in coord. polari è  $\theta(t) = t$  e  $\rho(t) = 2t$   
con  $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \text{Lunghezza}(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\underset{\dot{\rho}^2}{4} + \underset{\rho^2}{4t^2} \cdot \underset{\dot{\theta}^2}{1}} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2} dt \\ &= \text{con un po' di fatica di fa} \end{aligned}$$

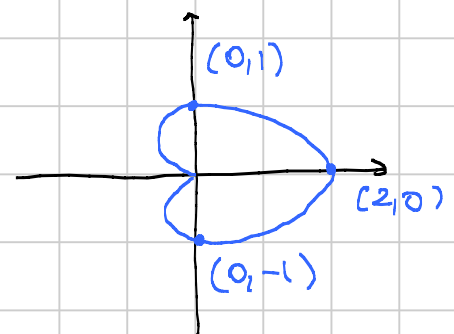


Esempio  $\rho = (1 + \cos \theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

CARDIOIDE

In polari  $\theta(t) = t \quad \rho(t) = 1 + \cos t$

$$\begin{aligned} \text{Lunghezza}(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + (1 + \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + 1 + \cos^2 t + 2\cos t} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt \end{aligned}$$



L' integrale si fa pensando che

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos t} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos\frac{t}{2} \right| \, dt = \text{si fa.}$$

3) Curva in coordinate sferiche  $\rho(t), \theta(t), \varphi(t)$

Usando la versione dei geografi:

$$x(t) = \rho(t) \cos\varphi(t) \cos\theta(t)$$

$$y(t) = \rho(t) \cos\varphi(t) \sin\theta(t)$$

$$z(t) = \rho(t) \sin\varphi(t)$$

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos\varphi \cos\theta - \rho \dot{\varphi} \sin\varphi \cos\theta - \rho \dot{\theta} \cos\varphi \sin\theta$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \cos\varphi \sin\theta - \rho \dot{\varphi} \sin\varphi \sin\theta + \rho \dot{\theta} \cos\varphi \cos\theta$$

$$\dot{z} = \dot{\rho} \sin\varphi + \rho \dot{\varphi} \cos\varphi$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 = & \boxed{\dot{\rho}^2 \cos^2\varphi \cos^2\theta} + \boxed{\rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta} + \boxed{\rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta} \\ & - 2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} \cos\varphi \sin\varphi \cos^2\theta - 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \cos^2\varphi \cos\theta \sin\theta \\ & + 2\rho^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin\varphi \cos\varphi \sin\theta \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}^2 = & \boxed{\dot{\rho}^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta} + \boxed{\rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta} + \boxed{\rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\varphi \cos^2\theta} \\ & - 2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} \cos\varphi \sin\varphi \sin^2\theta + \rho \dot{\rho} \dot{\theta} \cos^2\varphi \sin\theta \cos\theta \\ & - 2\rho^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin\varphi \cos\varphi \sin\theta \cos\theta \end{aligned}$$

$$\dot{z}^2 = \boxed{\dot{\rho}^2 \sin^2\varphi} + \boxed{\rho^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2\varphi} + 2\rho \dot{\rho} \sin\varphi \cos\varphi$$

Sommando resta  $\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\varphi$

Di conseguenza

$$Lunghezza(\sigma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2 \dot{\varphi}(t)^2 + \rho(t)^2 \dot{\theta}(t)^2 \cos^2\varphi(t)} \, dt$$

## Rapporto tra integrali di funzioni e forme diff.

$$\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a,b]$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \{ A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \} dt$$

$$= \int_a^b \left( A(x,y) \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + B(x,y) \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

per brevità  
non metto le  $t$   
dentro

[

Prodotto scalare tra  $(A,B)$  ed il vettore tangente  
alla curva

In questa scrittura l'integrale di una forma diventa  
l'integrale curvilineo del prodotto scalare tra il vettore  $(A,B)$   
ed il vettore tangente alla curva.

(N.B. se cambio verso alla curva, il vettore tangente cambia  
segno, e quindi l'integrale della forma pure).

— o — o —