

Integrali lungo curve di forme diff. (4 strategie)

Esempio 1 $\omega = dz$ $\gamma(t) = (t^{20}, 1+2t, \cos t)$ $t \in [0, \pi]$

1° modo Def. bovina: $\int_{\gamma} \omega = \int_0^{\pi} 1 \cdot (-\sin t) dt = -2$
 $\uparrow \dot{z}(t)$

2° modo Spesso nell'esattezza $\circledast$ $F(x, y, z) = z$

$$\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = -1 - 1 = -2 \quad \circledast$$

3° modo È chiusa, quindi uso curva alternativa tra gli stessi p.ti

$$\gamma(0) = (0, 1, 1) \quad \gamma(\pi) = (\pi^{20}, 1+2\pi, -1)$$

La curva la costruisco "unendo", cioè percorrendo una di seguito all'altra tre curve:

γ_1 da $(0, 1, 1)$ a $(\pi^{20}, 1, 1)$ in cui cambia solo la 1ª coord.

$$\gamma_1(t) = (t, 1, 1) \quad \text{con } t \in [0, \pi^{20}]$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0 = \int_0^{\pi^{20}} (0 \cdot \underbrace{\dot{x}(t)}_0 + 0 \cdot \underbrace{\dot{y}(t)}_0 + 1 \cdot \underbrace{\dot{z}(t)}_0) dt$$

γ_2 da $(\pi^{20}, 1, 1)$ a $(\pi^{20}, 1+2\pi, 1)$ fatta come prima con lo stesso integrale

Infine γ_3 da $(\pi^{20}, 1+2\pi, 1)$ a $(\pi^{20}, 1+2\pi, -1)$

$$\gamma_3(t) = (\pi^{20}, 1+2\pi, 1-t) \quad t \in [0, 2]$$

$$\int_{\gamma_3} \omega = \int_0^2 1 \cdot (-1) dt = -2 \quad \text{☺}$$

$$\uparrow \dot{z}(t)$$

Esempio 2 $\omega = y dx$ $\gamma(t) = (e^{\sin t}, e^{\sin t}, e^{\sin t})$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

ω non è chiusa, quindi NON è esatta $A_y \stackrel{?}{=} B_x$ $1 \stackrel{?}{=} 0$,
quindi addio a 2 e 3 come strategie

1° modo Def bovina $\int_{\gamma} \omega = \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^{\sin t}}_{y(t)} \underbrace{e^{\sin t} \cos t}_{\dot{x}(t)} dt$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot e^{2\sin t} dt = \left[\frac{1}{2} e^{2\sin t} \right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2}$$

2° modo Non posso cambiare di brutto la curva, ma posso riparametrizzarla. La curva data percorre il segmento da $(1, 1, 1)$ fino a (e, e, e) (le 3 componenti sono sempre uguali)

La stessa cosa fa la curva $(t, t, t) = \hat{\gamma}(t)$ con $t \in [1, e]$.

Usando questa otteniamo

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\hat{\gamma}} \omega = \int_1^e \underbrace{t}_{y(t)} \cdot \underbrace{1}_{\dot{x}(t)} dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{t=1}^{t=e} = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \quad \text{😊}$$

Esempio 3 $\omega = z^2 dx$ $\gamma(t) = (\cos(zt), t, \cos t)$ $t \in [0, \pi]$

ω non è chiusa, quindi non è esatta. $A_z \stackrel{?}{=} C_x$ $2z \stackrel{?}{=} 0$ 😞

Definizione: $\int_{\gamma} z^2 dx = \int_0^{\pi} \cos^2 t (-2\sin(zt)) dt$
 $= -4 \int_0^{\pi} \sin t \cos^3 t dt = [\cos^4 t]_{t=0}^{t=\pi} = 0$

Esempio 4 $\omega = dx - dy - dz$
 $\gamma(t) = (\arctan t, \sin t, t^2)$ $t \in [0, 1]$

Forse la via + breve è sfruttare l'esattezza

$$F(x, y, z) = x - y - z \quad [\text{Verifica!}]$$

$$\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F\left(\frac{\pi}{4}, \sin 1, 1\right) - F(0, 0, 0) \\ = \frac{\pi}{4} - \sin 1 - 1$$

Esempio 5 $\omega = 2xyz \, dx + x^2z \, dy + x^2y \, dz$

$$\gamma(t) = (t, t^4 + 1, t(t-1)) \quad t \in [0, 1]$$

1° modo Definizione: non ne ho voglia, ma si farebbe

2° modo Primitiva: $F(x, y, z) = x^2yz$ [Verifica!]

$$\int_0^1 \omega = F(1, 2, 0) - F(0, 1, 0) = 0$$

3° modo È chiusa, quindi posso cambiare curva, ad esempio il segmento congiungente

$$\hat{\gamma}(t) = (0, 1, 0) + t(1, 1, 0) = (t, 1+t, 0) \text{ con } t \in [0, 1]$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\hat{\gamma}} \omega = \int_0^1 t^2(1+t) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{z}(t)}}{0} \, dt = 0 \quad \text{☺}$$

Esempio 6 $(x^2 + y^2 + z^2)(x \, dx + y \, dy + z \, dz)$

$$\gamma(t) = (\sin t, \sin(2t), \sin(3t)) \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

La forma è esatta con $F(x, y, z) = \frac{1}{4} (x^2 + y^2 + z^2)^2$
↑ [cometto dopo video]

$$\int_{\gamma} \omega = F(1, 0, -1) - F(0, 0, 0) = 1$$

[Provare per esercizio con definizione e strategia 3]

LA SOLITA

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

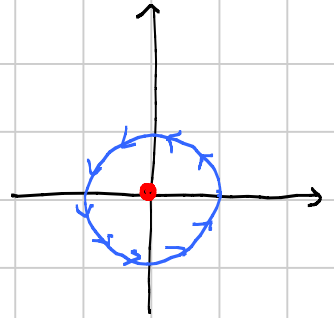
Si verifica (parlo!) che ω è CHIUSA, cioè $A_y = B_x$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Se fosse esatta, l'integrale su ogni curva chiusa dovrebbe venire 0
Ma se considero

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t} (-\sin t) + \frac{\cos t}{\dots} \cos t \right\} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$



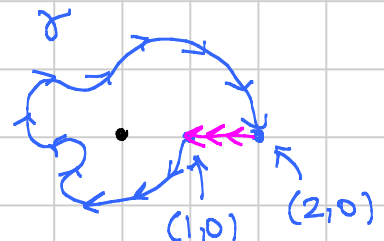
Oss 1 Le forme chiuse sono esatte sugli insiemi sempl. connessi.
Ora $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON è sempl. connesso, quindi nulla di male.
PERÒ il semipiano $y > 0$ è sempl. connesso (ad esempio perché è stellato) quindi in quella zona è esatta, quindi deve esistere una primitiva

Ad esempio $F(x,y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

$$F_x(x,y) = -\frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = -\frac{1}{y} \frac{y^2}{x^2+y^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$F_y(x,y) = -\frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{x}{y^2} \frac{y^2}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{😊}$$

Oss 2 Calcolare $\int_{\gamma} \omega$



Osserviamo che, se a γ aggiungiamo una $\hat{\gamma}$ che unisce $(2,0)$ con $(1,0)$ otteniamo una curva che fa un giro intorno al buco in verso opposto rispetto a quella utilizzata sopra.

Detto meglio

$\gamma \cup \hat{\gamma}$ è omotopa a - curva usata sopra

$$\int_{\gamma \cup \hat{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\hat{\gamma}} \omega = - \text{integrale di sopra} = -2\pi$$

↑
ho usato che la forma
è chiusa

e quindi

$$\int_{\gamma} \omega = -2\pi - \int_{\hat{\gamma}} \omega \quad - \hat{\gamma}(t) = (t, 0) \text{ con } t \in [1, 2]$$

$$= -2\pi + \int_0^1 \frac{\frac{1}{t} \cdot 0}{\frac{x(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}} dt = -2\pi$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $x(t)$ $\dot{y}(t)$
 $\frac{x(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}$