

Integrale di forme differenziali lungo curve

$$\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a, b]$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \{A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)\} dt$$

Strategie per il calcolo (vedi teoria):

- ① uso la definizione
- ② spero che la formula sia esatta, calcolo una primitiva $F(x, y)$ e poi "sostituisco gli estremi"

$$\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

- ③ Spero che la forma sia chiusa (se è esatta, ancora meglio) e poi uso la definizione cambiando la curva data con una nuova curva che ha gli stessi estremi ed è OMOTOPA a quella data (si ottiene "deformando" quella data)
- ④ Sostituisco γ con una curva che percorre lo stesso sostegno (riparametriz.)

Esempio 1 $\omega = xy \, dx + x y^2 \, dy$ $\gamma(t) = (\underbrace{t+t^3}_{x(t)}, \underbrace{t}_{y(t)}) \quad t \in [0,1]$

1° modo Definizione bovina:

[Corretto dopo video]

$$\int_a^b \omega = \int_0^1 \left\{ \underbrace{(t+t^3)}_{x(t)} \underbrace{(1+3t^2)}_{\dot{x}(t)} + \underbrace{(t+t^3)}_{x(t)} \underbrace{t^2}_{y(t)^2} \cdot \underbrace{1}_{\dot{y}(t)} \right\} dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 + t^4 + 1 + 2t^2 + t^3 + t^5) dt = \int_0^1 (1 + 3t^2 + t^3 + t^4 + t^5) dt = 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

[Dopo video : questa moltiplicazione ha palesemente dei problemi ☹)

2° modo

Non è esatta

$$A_y \stackrel{?}{=} B_x \quad x \neq y^2 \quad \therefore$$

3° modo

Non è chiusa

Esempio 2 $\omega = dx + y dy$ $\gamma(t) = (\sin^4 t, \cos(2t))$ $t \in [0, \pi]$

1° modo

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{\pi} \left\{ 1 \cdot \underset{\uparrow \dot{x}(t)}{4 \sin^3 t} \cdot \underset{\uparrow \dot{y}(t)}{\cos(2t)} + \underset{\uparrow \dot{y}(t)}{\cos(2t)} (-2 \sin(2t)) \right\} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \{ 4 \sin^3 t \cdot \cos(2t) - \sin(4t) \} dt$$

$$= \left[\sin^4 t + \frac{1}{4} \cos(4t) \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$$

2° modo

ω è esatta con primitiva $F(x, y) = x + \frac{1}{2} y^2$ [Verifica!]

$$\gamma(0) = (0, 1) \quad \gamma(\pi) = (0, 1)$$

$$\int_{\gamma} \omega = F(0, 1) - F(0, 1) = 0$$

Oss. Se ω non è esatta, allora $\int_{\gamma} \omega$ può venire $\neq 0$ anche se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Se ω è esatta e $\gamma(a) = \gamma(b)$, allora per forza $\int_{\gamma} \omega = 0$.

3° modo

ω è chiusa, quindi posso sostituire la curva con una più comoda con gli stessi estremi, in questo caso la curva costante, per cui $\dot{x}(t) \equiv \dot{y}(t) \equiv 0$.

Oss. Se Ω insieme è semplicemente connesso, due curve con gli stessi estremi sono sempre omotope.

Esempio 3 $\omega = (x + y) dx + x dy$

$$\gamma(t) = (t^0 + e^t, t^2 + e^{t^2}) \quad t \in [0, 1]$$

1° modo

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \left\{ \underbrace{(t^{10} + e^t + t^2 + e^{t^2})}_{x(t) + y(t)} \underbrace{(10t^9 + e^t)}_{\dot{x}(t)} + \underbrace{(t^{10} + e^t)}_{x(t)} \underbrace{(2t + 2te^{t^2})}_{\dot{y}(t)} \right\} dt$$

= non ne ho molta voglia ☹️

2° modo

ω è esatta con primitiva $F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy$ [Verifica!]

$$\gamma(0) = (1,1) \quad \gamma(1) = (1+e, 1+e)$$

$$\int_{\gamma} \omega = F(1+e, 1+e) - F(1,1) = \frac{1}{2}(1+e)^2 + (1+e)^2 - \frac{3}{2} = \text{😊}$$

3° modo

ω è chiusa, quindi posso provare con una curva più comoda che collega $(1,1)$ a $(1+e, 1+e)$

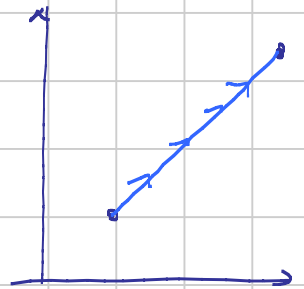
ad esempio la direttissima

$$\hat{\gamma}(t) = (t, t) \quad \text{con } t \in [1, 1+e]$$

Uso la def. con la nuova curva

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\hat{\gamma}} \omega = \int_1^{1+e} \underbrace{(2t \cdot 1)}_{x+y} \underbrace{+}_{\uparrow} \underbrace{t \cdot 1}_{\dot{x}} \underbrace{+}_{\uparrow} \underbrace{1}_{\dot{y}} dt = \text{😊}$$

↑ verificare che venga uguale al precedente



Esempio 4

$$\omega = (x^2 y^2) dx + (y^2 + x^2) dy$$

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [0, \frac{1}{2}]$$

$$A_y \stackrel{?}{=} B_x$$

$2y \neq 2x \Rightarrow$ NO chiusa e no esatta
 $\Rightarrow$ addio strategie ② e ③

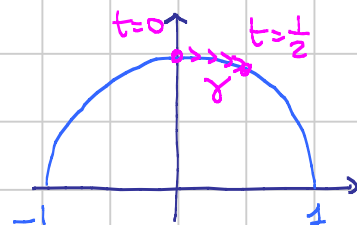
1° modo

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \underbrace{1 \cdot 1}_{\dot{x}(t)} + 1 \cdot \left(\sqrt{1-t^2} \right)' \right\} dt$$

$$= \left[t + \sqrt{1-t^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} - 1$$

4° modo Consideriamo la curva

$$\hat{\gamma}(t) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Osserviamo che $\hat{\gamma}$ percorre lo stesso sostegno, ma in senso opposto.
Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= - \int_{\hat{\gamma}} \omega = - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 \cdot (-\sin \theta) + 1 \cos \theta) d\theta \\ &\quad \text{verso percorrenza} \quad \text{è opposto} \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta - \cos \theta) d\theta = [-\cos \theta - \sin \theta]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{😊} \end{aligned}$$

[Come sempre, fare le cose in 2 modi diversi rivela gli errori!]

Esempio 5 $\omega = (y + \arctan x) dx + (x + \arctan y) dy$

$$\gamma(t) = (\sin^3 t, \cos^5 t) \quad t \in [0, 4\pi]$$

1° modo Poco raccomandabile :-

2° modo $A_y \stackrel{?}{=} B_x \quad 1 = 1 \quad \text{😊} \quad \text{Chiusa} \Rightarrow \text{esatta}$ su $\mathbb{R}^2$

$\gamma(0) = (0, 1) = \gamma(4\pi) \Rightarrow$ stessi estremi $\Rightarrow \int_{\gamma} \omega = 0$ senza nemmeno bisogno di calcolare $F(x, y)$

Esempio 6 $x(dx + dy) \quad \gamma(t) = (\sin t, \cos t) \quad t \in [0, 4\pi]$

Osservo che γ percorre la circ. trigonometrica a partire da $(0, 1)$ 2 volte in verso orario.

Osservo che $x dx + x dy$ non è chiusa $\Rightarrow$ non esatta ($A_y=0, B_x=1$)

Quindi restano ① e ④, ma fortunatamente la curva è decente

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{4\pi} (\sin t \cdot \cos t + \sin t (-\sin t)) dt = \text{si fa facile.}$$

Esempio 7 $\omega = x \sin(xy) dx + y \cos(xy) dy$

$$\gamma(t) = (t, 2t) \quad t \in [0, \pi]$$

ω è esatta?

$$A_y = x^2 \cos(xy)$$

$$B_x = -xy \sin(xy)$$



$\Rightarrow$ resta solo la definizione

Esempio 8 $\omega = e^{xy} y dx + e^{xy} x dy$

$$\gamma(t) = (t^3 + t^6, t + t^7) \quad t \in [0, 1]$$

1° modo Integrale inquietante 😞

2° modo È esatta con $F(x, y) = e^{xy}$ [Verifica!]

$$\int_{\gamma} \omega = F(2, 2) - F(0, 0) = e^4 - 1 \quad \text{😊}$$

3° modo È chiusa e cambio la curva con la dirrettissima

$$\hat{\gamma}(t) := (t, t) \quad t \in [0, 2]$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\hat{\gamma}} \omega = \int_0^2 2t e^{t^2} dt = [e^{t^2}]_{t=0}^{t=2} = e^4 - 1 \quad \text{😊}$$

omotope in $\mathbb{R}^2$

— o — o —