

Forme differenzialiVedi AM2-14 Lezioni ≤ 40

Stabilire se una forma diff. è esatta e in caso affermativo trovare una primitiva.

Strumenti:

→ No chiusa $\Rightarrow$ No esatta

→ SI chiusa + insieme di def. sempl. connesso $\Rightarrow$ esatta
(ad esempio stellato)

NB Una forma può essere esatta in un certo insieme, ma non esatta in un altro insieme. Può anche accadere
 esatta in A non esatta in A $\cup$ B
 esatta in B

Esempi in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = A(x,y) dx + B(x,y) dy \quad (\text{su tutto } \mathbb{R}^2)$$

① $\omega = dx = 1 \cdot dx + 0 \cdot dy$ Esatta $F(x,y) = x$

② $\omega = dx + dy$ " $F(x,y) = x + y$

③ $\omega = x dx + y dy$ Esatta $F(x,y) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2$

[Verifica!]

④ $\omega = x dx + x dy$ non esatta. Mostriamo che non è chiusa

$$A_y(x,y) \stackrel{?}{=} B_x(x,y)$$

0 $\neq$ 1

⑤ $\omega = x^3 dy$ $A_y \stackrel{?}{=} B_x$ 0 $\neq$ $3x^2 \Rightarrow$ non chiusa $\Rightarrow$ non esatta

⑥ $\omega = x dx - y dy$ $A_y \stackrel{?}{=} B_x$ $0 = 0 \Rightarrow$ ok chiusa
 $\mathbb{R}^2$ sempre conn. $\Rightarrow$ esatta
 $F(x,y) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2$

$\omega = y dx - x dy$ $A_y \stackrel{?}{=} B_x$ $1 \neq -1$
 NO chiusa $\Rightarrow$ NO esatta

⑦ $xy(dx+dy) = xy dx + xy dy$ $A_y \stackrel{?}{=} B_x$
 $x \neq y$
 NO chiusa $\Rightarrow$ NO esatta

⑧ $\frac{dx}{x^2+1} + \frac{dy}{y^2+1}$ $A_y \stackrel{?}{=} B_x$ chiusa + $\mathbb{R}^2$ sempre conn.
 $0 = 0 \Rightarrow$ esatta
 $F(x,y) = \arctan x + \arctan y$

Oss. Le forme del tipo $\overset{\substack{\uparrow \\ \text{solo } x}}{a(x)} dx + \overset{\substack{\uparrow \\ \text{solo } y}}{b(y)} dy$
 sono sempre esatte con $F(x,y) = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{primitiva di } a(x)}}{A(x)} + \overset{\substack{\uparrow \\ \text{primitiva di } b(y)}}{B(y)}$

⑨ $\frac{1}{y^2+1} dx + \frac{1}{x^2+1} dy$ $A_y \stackrel{?}{=} B_x$
 $-\frac{2y}{(y^2+1)^2} \neq -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

Oss. Le forme del tipo $a(y) dx + b(x) dy$
 sono quasi sempre NON chiuse e quindi non esatte, a meno che $a(y)$ e $b(x)$ siano funzioni costanti, oppure
 $a(y) = \alpha y + c_1$ e $b(x) = \alpha x + c_2$

$A_y = B_x \Leftrightarrow a'(y) = b'(x)$ e due funzioni di variabili diverse possono essere uguali solo se sono costanti.

$$(10) \quad (x-y) dx + (y-x) dy \quad A_y = B_x$$

$$-1 = -1$$

Chiusa + def. in $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ esatta

$$F(x,y) = \frac{1}{2} (x-y)^2$$

$$(11) \quad (x+y) dx + x dy \quad A_y = B_x$$

$$1 = 1$$

chiusa ed esatta

$$F(x,y) = \frac{1}{2} x^2 + xy$$

$$(12) \quad (x^2 + y^2) dx + 2xy dy \quad A_y = B_x$$

$$2y = 2y$$

chiusa ed esatta!

$$F(x,y) = \frac{1}{3} x^3 + xy^2 \quad [\text{Verifica!}]$$

$$(13) \quad e^{x^2y} (2xy dx + x^2 dy) = 2xy e^{x^2y} dx + x^2 e^{x^2y} dy$$

Si può fare la verifica della chiusura, ma ad occhio

$$F(x,y) = e^{x^2y}$$

$$(14) \quad (xe^{x^2} + y) dx + (\arctan y + x) dy \quad A_y \stackrel{?}{=} B_x$$

$$1 = 1$$

è chiusa e quindi (siamo in $\mathbb{R}^2$) esatta

$$F(x,y) = \frac{1}{2} e^{x^2} + xy + \text{primitiva di } \arctan y \quad [\text{Verifica!}]$$

↑ si calcola per parti

$$y \arctan y - \frac{1}{2} \log(1+y^2)$$

Forme diff. in $\mathbb{R}^3$ (ora la chiusura sono 3 verifiche
 $A_y = B_x, A_z = C_x, B_z = C_y$)

$$\omega = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$$

① $3dx + ydy - 2dz \rightsquigarrow$ a occhio $F(x,y,z) = 3x + \frac{1}{2}y^2 - 2z$
[Verifica!]

② $\omega = \sin z dx + x \cos z dz \rightsquigarrow$ a occhio $F(x,y,z) = x \sin z$

③ $\omega = xdx + ydy + zdz \rightsquigarrow$ a occhio $F(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$

④ $\omega = xdx + zdy + ydz \rightsquigarrow$ a occhio $F(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + yz$

⑤ $\omega = ydx + zdy + xdz$

$A_y = B_x$	$1 = 0$	NO!
$A_z = C_x$	$0 = 1$	
$B_z = C_y$	$1 = 0$	

⑥ $ydx + (z+x)dy + ydz$

$A_y = B_x$	$1 = 1$	☺
$A_z = C_x$	$0 = 0$	☺
$B_z = C_y$	$1 = 1$	☺

Chiusa + $\mathbb{R}^3$ sempl. conn. $\Rightarrow$ esatta

$$F(x,y,z) = xy + yz \quad \text{[Verifica!]}$$

⑦ $(x+z)dx + (y+z)dy + (x+y)dz$

$A_y = B_x$	$0 = 0$	☺
$A_z = C_x$	$1 = 1$	☺
$B_z = C_y$	$1 = 1$	☺

Quindi è chiusa e quindi esatta

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xz + \frac{1}{2}y^2 + yz \quad \text{☺}$$

$$(8) \quad yz dx + zx dy + xy dz$$

$$F(x,y,z) = xyz \quad \text{😊}$$

$$(9) \quad (x+y+z)(dx+dy+dz)$$

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}(x+y+z)^2$$

$$(10) \quad x dx + (y^2 - z) dy - y dz$$

$$A_y = B_x \quad 0 = 0 \quad \text{😊}$$

$$A_z = C_x \quad 0 = 0 \quad \text{😊}$$

$$B_z = C_y \quad -1 = -1 \quad \text{😊}$$

È chiusa e quindi esatta

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - yz$$

Verifica 😊

$$(11) \quad (x^2 + y^2 + z^2)(dx + dy + dz)$$

$$A_y = B_x$$

$$2y \neq 2x$$

😞

Non è chiusa, quindi NON è esatta !!

$$(12) \quad e^{x+2z} dx + y^3 dy + \alpha e^{x+2z} dz$$

Stabilire per quali valori di α è esatta.

$$A_y = B_x \quad 0 = 0 \quad \text{😊}$$

$$B_z = C_y \quad 0 = 0 \quad \text{😊}$$

$$A_z = C_x \quad 2e^{x+2z} = \alpha e^{x+2z}$$

Sono uguali $\Leftrightarrow \alpha = 2$

Per $\alpha \neq 2$ non è chiusa e quindi non è esatta

Per $\alpha = 2$ è chiusa e quindi (essendo in $\mathbb{R}^3$ che è sempl. conn.)

è esatta. Per $\alpha = 2$ UNA primitiva è

$$F(x,y,z) = e^{x+2z} + \frac{1}{4}y^4 \quad \text{[Verifica!]}$$

— o — o —