

Esempio 1 $\gamma(t) = (t \sin t, t \cos t)$ $t \in [-\pi, \pi]$

→ Chiusa? $\gamma(-\pi) = (0, \pi)$ $\gamma(\pi) = (0, -\pi)$ (SI)

→ Semplice? Osservazione: la prima componente è pari, la seconda è dispari

2^a oss. : $x(t)^2 + y(t)^2 = t^2$

Esempio 0 $\gamma(t) = (t \sin t, t \cos t)$ $t \in [0, 4\pi]$

→ Semplice? (SI) Considero la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$

$f(x(t), y(t)) = t^2 \leftarrow$ in $[0, 4\pi]$ è strett. cresc., quindi monotona

[Se ho $x(t) = x(s)$ e $y(t) = y(s)$, allora per forza

$$\underset{t^2}{x(t)^2 + y(t)^2} = \underset{s^2}{x(s)^2 + y(s)^2}$$

e questo se t ed s sono in $[0, 4\pi]$ implica $t=s$]
— o — o —

Lo stesso trucco non funziona subito nell'esempio 1, ma quasi!

Supponiamo $\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$

Allora $t^2 = s^2$, e in $[-\pi, \pi]$ questo vale se e solo se $t=s$ oppure $t=-s$. Nel primo caso siamo a posto.

Nel secondo caso avveniamo

$$x(t) = x(-t)$$

$$y(t) = y(-t)$$

$$t \sin t = (-t) \sin(-t) = t \sin t$$

$$t \cos t = (-t) \cos(-t) = -t \cos t$$

$$\leadsto 2t \cos t = 0 \leadsto t = 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$
$$s = 0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

E quindi la curva non è semplice perché

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

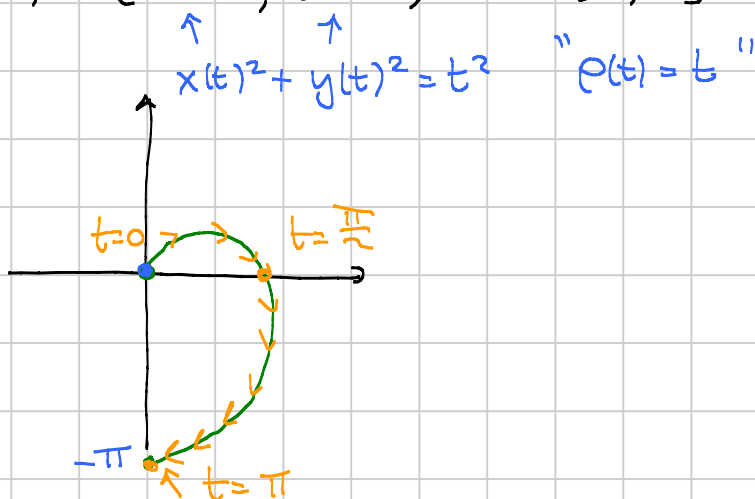
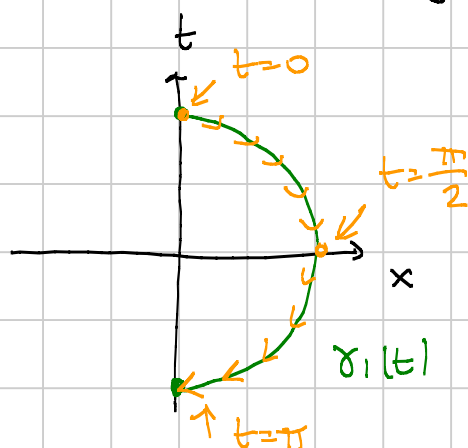
$$\gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Abbiamo trovato 2 valori diversi di t per cui la curva sta nello stesso punto! Basta questa SOLA RIGA per dire che la curva NON è semplice!!

Esempio 0.5

Disegnare $\gamma_1(t) = (\sin t, \cos t)$ $t \in [0, \pi]$

Disegnare $\gamma_2(t) = (t \sin t, t \cos t)$ $t \in [0, \pi]$



Esempio 2

$\gamma(t) = (2t + t^2, t + t^2)$ $t \in [-2, 2]$

→ Chiusa?

$$\gamma(-2) = (0, 2)$$

$$\gamma(2) = (8, 6)$$

NO

→ Semplice?

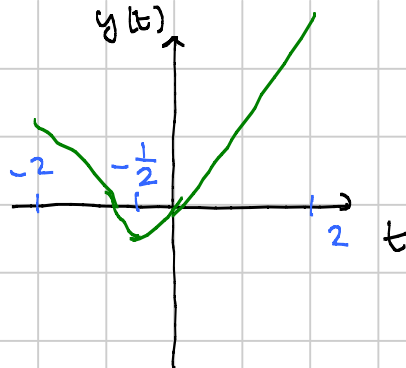
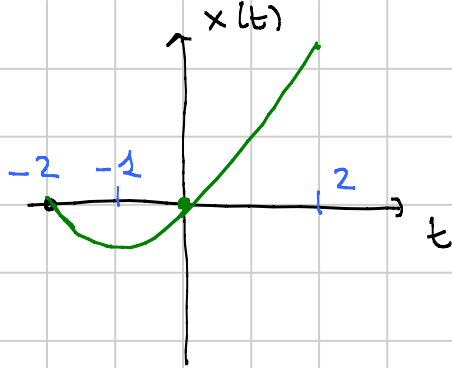
Vediamo se ci sono componenti monotone

$$x(t) = 2t + t^2$$

$$x'(t) = 2 + 2t$$

$$y(t) = t + t^2$$

$$y'(t) = 1 + 2t$$



Nessuna componente è monotona in $[-2, 2]$ 😞

Imposto il sistema

$$\begin{cases} 2t + t^2 = 2s + s^2 \\ t + t^2 = s + s^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - s^2 = 2s - 2t \\ t^2 - s^2 = s - t \end{cases} \quad \begin{cases} (t+s)(t-s) = -2(t-s) \\ (t+s)(t-s) = -(t-s) \end{cases}$$

si potrebbe anche semplificare, perché il caso $t=s$ è quello che ci va bene

Raccogliamo che è più sicuro!

$$\begin{cases} (t-s)(t+s+2) = 0 \\ (t-s)(t+s+1) = 0 \end{cases}$$

1ª equ $\nearrow t=s$ 😊

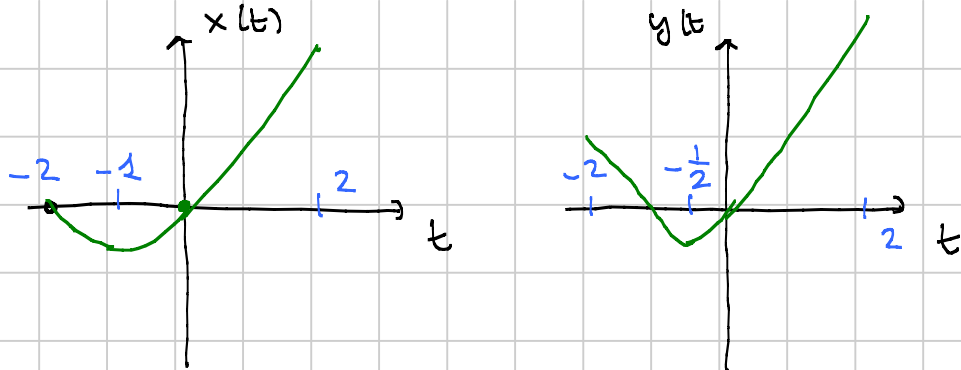
$\searrow t+s=-2 \rightarrow$ 2ª equ. $(t-s)(-1)=0 \rightarrow t=s$ 😊

L'unica possibilità è $t=s$, quindi la curva è semplice!

2º modo Si poteva fare con l'invariante! $x(t) = 2t + t^2$
 $y(t) = t + t^2$

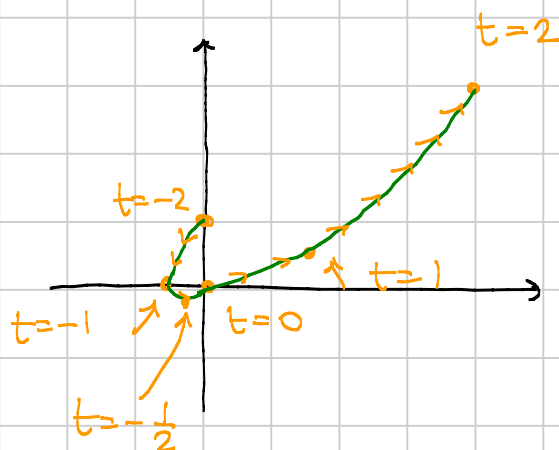
Considero $f(x, y) = x - y$. Allora

$f(2t+t^2, t+t^2) = t$ che è iniettiva 😊



Dalle componenti, deduciamo il disegno della curva

- Per $t \in [-2, -1]$ abbiamo $x(t)$ scende e $y(t)$ pure
- Per $t \in [-1, -\frac{1}{2}]$ abbiamo $x(t)$ sale e $y(t)$ continua a scendere
- Per $t \in [-\frac{1}{2}, 2]$ abbiamo che $x(t)$ e $y(t)$ salgono entrambe



Esempio 3 $\gamma(t) = (t^2+t, \sin^2 t)$ $t \in [-\pi, \pi]$

Semplicità e disegno

$$\boxed{\text{Sistema}} \quad \begin{cases} t^2+t = s^2+s & \leadsto t^2-s^2 = s-t \\ \sin^2 t = \sin^2 s & (t+s)(t-s) = -(t-s) \\ & (t-s)(t+s+1) = 0 \end{cases}$$

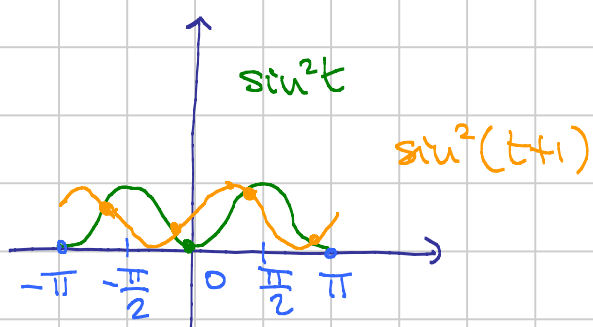
Dalla prima equazione ricaviamo 2 possibilità

$\rightarrow t=s$ ☺

$\rightarrow t+s = -1 \leadsto s = -t-1 \leadsto$ inseriamo nella 2^a eq.

$$\sin^2 t = \sin^2(-t-1) \leadsto \sin^2 t = \sin^2(t+1)$$

come $\sin^2 t$, ma traslata a sinistra di 1



Comparsa delle intersezioni non banali, quindi NO semplice

Posso trovare esplicitamente due punti t ed s con $\delta(t) = \delta(s)$?

[SI] Impongo $t = \pi - (t+1) \quad \leadsto \quad 2t = \pi - 1$
 $\sin d = \sin(\pi - d) \quad \leadsto \quad t = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$
 $\leadsto \quad s = -t - 1 = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

Dico che $\delta\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) = \delta\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \stackrel{ok}{=} \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) \stackrel{?}{=} \sin^2\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

Infatti $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)$

Quando faccio i quashoti le cose si sistemano!

Oss. Per dimostrare che non è semplice basta verificare che

$$\delta\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) = \delta\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

Come farsi venire in mente i due p.ti strani? Provando a risolvere il sistema!!

— o — o —