

Curve $\rightarrow$ chiusura
semplicità
retta tangente
disegno

Prerequisiti : AM2-14 LeA 35

Curva: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^d)$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

Chiusa $\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$ [Come verifico? Sostituisco gli estremi]

Retta tangente in un certo t_0 : $\gamma(t_0) + t \gamma'(t_0)$

retta che passa per $\gamma(t_0)$ e che ha direzione data da $\gamma'(t_0)$ se questo è $\neq 0$

Semplice $\Leftrightarrow$ iniettiva, tranne al più agli estremi, cioè se

$$\gamma(t) = \gamma(s) \Rightarrow t = s \text{ oppure } \{t, s\} = \{a, b\}$$

Come verifico la semplicità?

$\rightarrow$ spero che almeno una delle componenti sia monotona strett.

(questo fallisce di sicuro se la curva è chiusa)

$\rightarrow$ spero che esista un INVARIANTE MONOTONO, cioè una funzione $f(x, y)$ tale che $t \rightarrow f(x(t), y(t))$ sia monotona

$\rightarrow$ Imposto il sistema $\begin{cases} x(t) = x(s) \\ y(t) = y(s) \end{cases}$ e spero risolvendo di trovare $t = s$ oppure

$\rightarrow$ Ragiono "per zone"

gli estremi

Esempio 1 $\gamma(t) = (t, t^2)$ $t \in [-2, 2]$

→ Chiusa? NO: $\gamma(-2) = (-2, 4)$ $\gamma(2) = (2, 4)$ DIVERSI

→ Retta tangente in $t=1$ Punto $\gamma(1) = (1, 1)$
 $\dot{\gamma}(t) = (1, 2t) \leadsto \dot{\gamma}(1) = (1, 2)$

Retta tangente $(1, 1) + t(1, 2) = (1+t, 1+2t)$

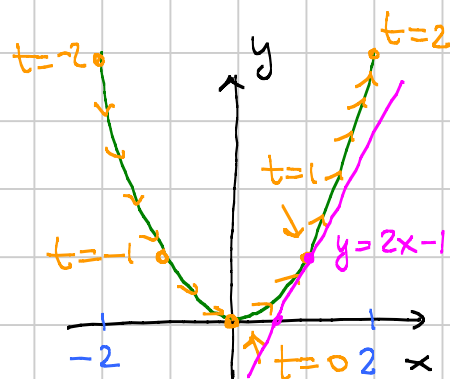
Volevamo sì passa in cartesiana

$$x = 1+t \leadsto t = x-1 \leadsto y = 1+2t = 1+2x-2 = 2x-1$$
$$\leadsto y = 2x-1$$

→ Semplice? SI: basta osservare che $x(t)$ è monotona per $t \in [-2, 2]$

La seconda componente non è monotona, ma non importa!

→ Disegno. È la parametrizzazione del grafico di $y = x^2$ con $x \in [-2, 2]$

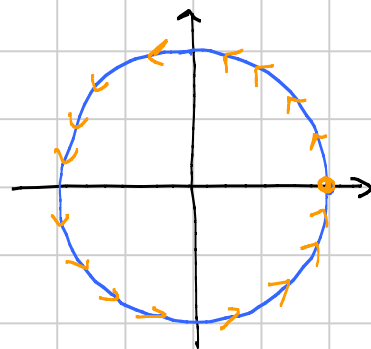


Nel disegno c'è il "sostegno" della curva

Esempio 2 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$

→ Chiusa: SI $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$
↑ [Cometto dopo video]

→ Semplice: SI, ma le componenti non sono monotone.



Semplicità dimostrata per zone: voglio mostrare che

$$\gamma: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

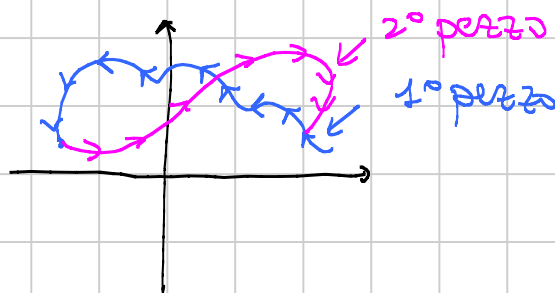
$\uparrow$ escluso

è iniettiva. Divido l'intervallo in 2

→ per $t \in [0, \pi]$ la curva è iniettiva perché $\cos t$ è monotona in $[0, \pi]$

→ per $t \in (\pi, 2\pi)$ (ho escluso gli estremi) la curva è di nuovo iniettiva perché $\cos t$ è monotona pure in $(\pi, 2\pi)$ (ora è crescente, prima era decrescente)

Achtung! Non basta essere iniettive in $[0, \pi]$ e in $(\pi, 2\pi)$ per esserlo globalmente in $[0, 2\pi)$, cioè l'iniettività NON SI RINCOLLA. Potrebbero esistere $t_1 \in [0, \pi]$ e $t_2 \in (\pi, 2\pi)$ tali che $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$



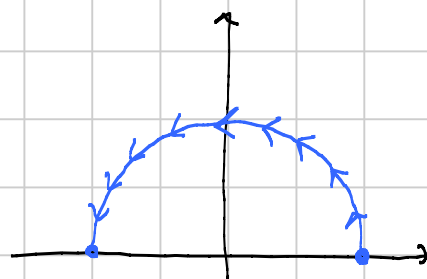
→ Nei due sottointervalli la curva sta in "zone diverse": infatti per $t \in [0, \pi]$ la curva ha $y(t) \geq 0$, mentre per $t \in (\pi, 2\pi)$ la curva ha $y(t) < 0$, quindi non sono possibili intersezioni.

Esempio 4 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 6\pi]$

La curva ha lo stesso sostegno di prima, ma lo percorre 3 volte, quindi NON è chiusa e NON è semplice.

Esempio 5 $\gamma(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$
 $t \in [-1, 1]$ $\uparrow$ prima componente monotona

$$[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 1$$



Esempio 6 $\gamma(t) = (\cos^3 t, 2 \sin t)$ $t \in [-\pi, \pi]$

→ Chiusa?

$$\gamma(-\pi) = (-1, 0)$$

Sì, è chiusa

$$\gamma(\pi) = (-1, 0)$$

→ Semplice?

Non c'è speranza di avere una componente monotona

Impostiamo il sistema:

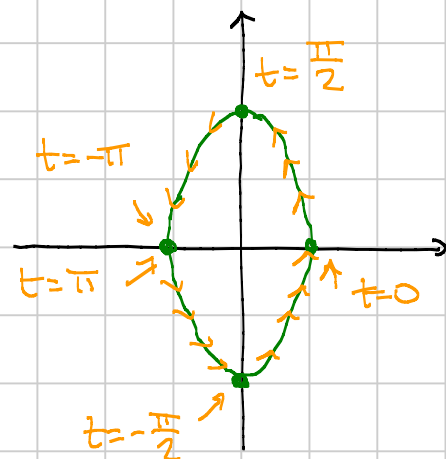
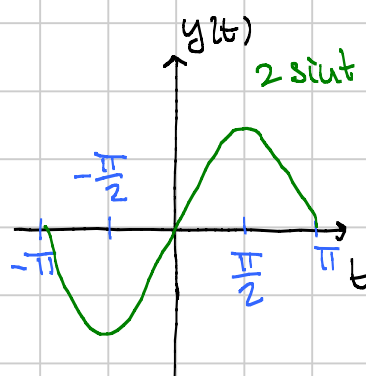
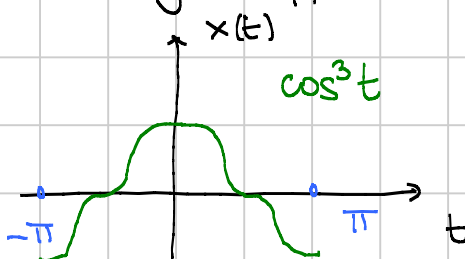
$$\begin{cases} \cos^3 t = \cos^3 s \\ 2 \sin t = 2 \sin s \end{cases} \quad \text{posso fare } \sqrt[3]{} \quad \begin{cases} \cos t = \cos s \\ \sin t = \sin s \end{cases}$$

Essendo t ed s in $[-\pi, \pi]$, quindi "nello stesso giro", l'unica possibilità è che sia $t = s$ oppure t ed s uguali ai 2 estremi.

Si poteva fare con le zone? Sì!

- per $t \in [-\pi, 0]$ si ha che $x(t) = \cos^3 t$ è monotona cresc. e $y(t) = 2 \sin t \leq 0$
- per $t \in (0, \pi)$ si ha che $x(t) = \cos^3 t$ è monotona decresc. e $y(t) = 2 \sin t > 0$
- i due rami non si intersecano perché stanno in semipiani diversi

→ Disegno approssimato



Esempio 7 $\gamma(t) = (e^t, 2\sin t)$ $t \in [-1, 1]$

→ chiusa? NO $\gamma(-1) = (\frac{1}{e}, 2\sin(-1))$
 $\gamma(1) = (e, 2\sin 1)$

→ Semplice? SI : entrambe le componenti sono monotone in $[-1, 1]$

→ Retta tangente in $t=0$ $\gamma(0) = (1, 0)$
 $\dot{\gamma}(t) = (e^t, 2\cos t)$
 $\dot{\gamma}(0) = (1, 2)$

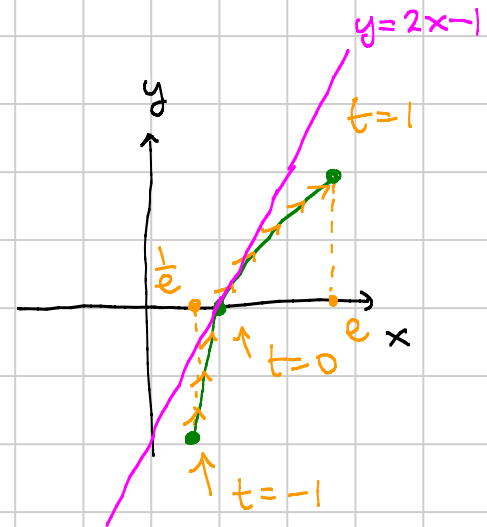
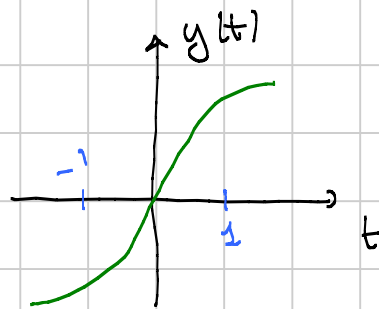
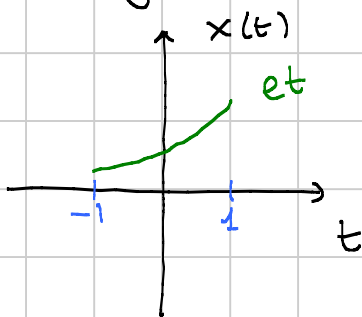
$(1, 0) + t(1, 2) = (1+t, 2t)$

$x = 1+t$ $t = x-1$

$y = 2t = 2x - 2$

$y = 2x - 1$

→ Disegno sommario



— 0 — 0 —