

## Calcolo di baricentri e momenti di inerzia

Prerequisiti: lez. 32-33-34 di AM2-14

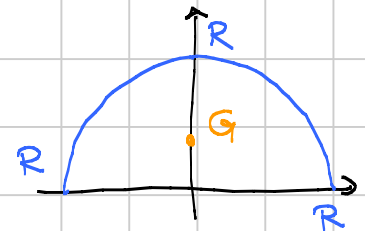
Per figure piane:  $G = (x_G, y_G)$

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}} \iint_{\text{Figura}} x \, dx \, dy$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}} \iint_A y \, dx \, dy$$

Per figure solide è uguale, solo con 3 componenti e dividendo per il volume.

Esempio 1 (Semicerchio)  $x_G = 0$   
(per simmetria)



$$\iint_{\text{Fig}} y \, dx \, dy = \int_0^R dp \int_0^\pi d\theta \, p \sin \theta \, p = 2 \frac{1}{3} R^3$$

$$y_G = \frac{2}{3} R^3 \frac{1}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4}{3\pi} R \quad (\text{un po' meno di metà, ma non troppo meno})$$

Momento di inerzia rispetto ad un asse = integrale del quadrato della distanza dall'asse stesso.

Rispetto all'asse  $x$

$$\begin{aligned} \iint_{\text{Fig}} y^2 \, dx \, dy &= \int_0^R dp \int_0^\pi d\theta \, p^2 \sin^2 \theta \, p \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{4} R^4 \end{aligned}$$

Rispetto all'asse  $y$

$$\iint_{\text{Fig}} x^2 \, dx \, dy = \text{viene uguale.}$$

### Esempio 2 (semisfera)

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad z \geq 0$$

$$(x_G, y_G, z_G)$$

$$z_G = \frac{1}{\text{Vol}} \iiint z \, dx \, dy \, dz$$

$$\text{Vol} = \frac{2}{3} \pi R^3$$

$$\iiint z \, dx \, dy \, dz = \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, \rho \sin \varphi \, \rho^2 \cos \varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^R \rho^3 \, d\rho}_{\frac{1}{4} R^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}_{\left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi\right]_0^{\pi/2}} = \frac{1}{4} R^4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{R^4}{4} \pi$$

$$z_G = \frac{R^4}{4} \cancel{\pi} \frac{3}{2\pi R^3} = \frac{3}{8} R \quad (\text{più basso rispetto al semicerchio})$$

### Esempio 3 (Pezzo di paraboloido)

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 1$$

$$(x_G, y_G, z_G)$$

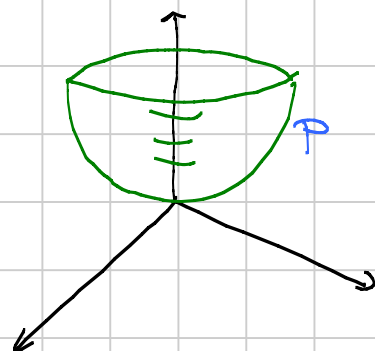
$$\text{Vol}(P) = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy \int_{x^2+y^2}^1 dz$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (1 - \rho^2) \rho$$
$$= 2\pi \left[ \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\iiint_P z \, dx \, dy \, dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_{z=x^2+y^2}^{z=1}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (1 - \rho^4) \rho = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \left[ \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{6} \rho^6 \right] = \frac{\pi}{3}$$

$$\leadsto z_G = \frac{2}{3} \quad (\text{ragionevole})$$

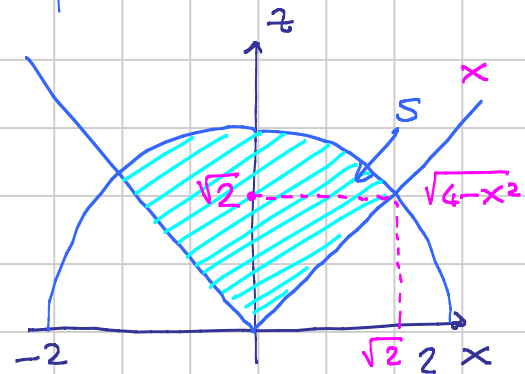


Momento di inerzia rispetto a  $z$  =  $\iiint_P \underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{distanza da asse } z} dx dy dz$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy (x^2+y^2) \int_{x^2+y^2}^1 dz = \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p^2 (1-p^2) p = \text{si fa.}$$

Esempio 4  $\underbrace{x^2+y^2+z^2 \leq 4}_{\text{sfera}}, \underbrace{x^2+y^2 \leq z^2}_{\text{cono}}, \underbrace{z \geq 0}_{\text{parte alta}}$

Interseco:  $\sqrt{4-x^2} = x$   
 $4-x^2 = x^2 \leadsto x^2 = 2$   
 $\leadsto x = \pm\sqrt{2}$



Volume per colonne

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 2} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} dp \int_0^{2\pi} d\theta (\sqrt{4-p^2} - p) p = \text{si fa}$$

Nota: integrare  $z$  in questo modo è ancora più comodo

Volume per sezioni

La sezione  $S_z$  è un cerchio di raggio

- $z$  se  $z \in [0, \sqrt{2}]$
- $\sqrt{4-z^2}$  se  $z \in [\sqrt{2}, 2]$

Quindi

$$\text{Volume} = \int_0^{\sqrt{2}} dz \pi z^2 + \int_{\sqrt{2}}^2 dz \pi (4-z^2) dz = \text{si fa facile}$$

[Se volevo integrare  $z$ , bastava moltiplicare per  $z$  le due integrande]

Volume in coord. sferiche  $\rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$$\text{Volume} = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos \varphi d\varphi = \text{si fa tranquillo}$$

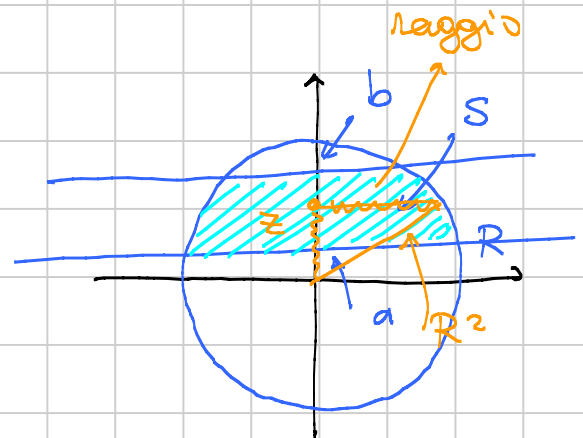
[Se dovevo integrare  $z$ , dovevo integrare  $\rho \sin \varphi \cdot \rho^2 \cos \varphi$ ]

[Controllare che il risultato sia lo stesso nei 3 modi 😊]

Esempio 5 Segmento sferico in generale

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad a \leq z \leq b$$

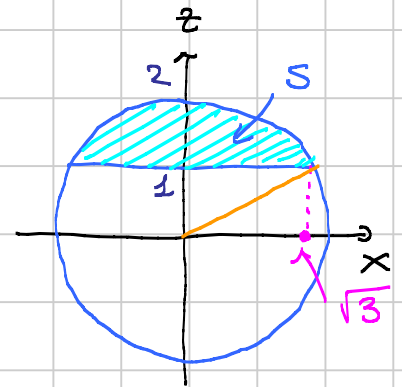
$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \int_a^b dz \text{Area}(S_z) \\ &\quad \uparrow \text{sezioni} \quad \uparrow \text{raggio } \sqrt{R^2 - z^2} \\ &= \pi \int_a^b (R^2 - z^2) dz = \text{si fa facile} \end{aligned}$$



$$\iiint_S z dx dy dz = \pi \int_a^b z (R^2 - z^2) dz = \text{si fa}$$

Esempio 6  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \quad z \geq 1$

Vogliamo momento di inerzia rispetto  
asse  $z$



$$\iint_S (x^2 + y^2) dx dy dz$$

1° modo: sezioni  $= \int_1^2 dz \iint_{S_z} (x^2 + y^2) dx dy$

$S_z$  ha raggio  $\sqrt{4-z^2}$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho^2 \cdot \rho = 2\pi \int_1^2 dz \left[ \frac{1}{4} \rho^4 \right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{4-z^2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^2 (4-z^2)^2 dz = \text{😊} \end{aligned}$$

2° modo: colonne

$$= \iint_{\text{Base}} dx dy (x^2 + y^2) \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz$$

$$= \iint_{\text{Base}} (x^2 + y^2) [\sqrt{4-x^2-y^2} - 1] dx dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \rho^2 (\sqrt{4-\rho^2} - 1) \rho$$

= si fa con un epsilon di fatica  $t = 4 - \rho^2$  e vai per sostituzione

3° modo: si può fare in sferiche?

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$$

Dove varia  $\rho$ ?

$$z \geq 1 \quad \rho \sin \varphi \geq 1 \quad \rho \geq \frac{1}{\sin \varphi} \quad \leadsto \quad \frac{1}{\sin \varphi} \leq \rho \leq 2$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sin \varphi}}^2 dp \underbrace{\frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{x^2 + y^2}}_{\frac{\rho \cos \varphi}{z}}$$

$$= 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi \int_{\frac{1}{\sin \varphi}}^2 \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \left( 16 - \frac{1}{\sin^4 \varphi} \right) d\varphi = \text{si fa}$$

$$\int \cos^3 \varphi = \int \cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi$$

$\sin \varphi = t$  e viene

$$\int \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^4 \varphi} = \int \cos \varphi \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\sin^4 \varphi} d\varphi$$

"

"

[Controllare che venga lo stesso nei 3 modi :)]