

Esempio 1 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$

$$\iiint_A |x+y-z| dx dy dz$$

Cambio di variabili : $x = u$

$$z = v$$

$$x+y=w \leadsto y = w-u$$

Le 4 condizioni diventano

$$x \geq 0 \leadsto u \geq 0$$

$$y \geq 0 \leadsto w-u \geq 0, \quad w \geq u$$

$$z \geq 0 \leadsto v \geq 0$$

$$x+y+z \leq 1 \leadsto w+v \leq 1$$

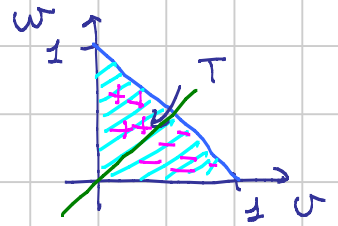
$$0 \leq u \leq w$$

descrizione di colonna
(N.B. L'integranda non dipende da u)

$$= \iint_{\text{Base}} dv dw \int_0^w du |w-v| = \iint_{\text{Base}} |w-v| w dv dw$$

Chi è la base? La base è data da $v \geq 0, w+v \leq 1, w \geq 0$

$$= \iint_T w |w-v| dv dw = \text{questo di sopra}$$



$$= \iint_{T^+} w(w-v) dv dw + \iint_{T^-} w(v-w) dv dw = \text{si calcolano.}$$

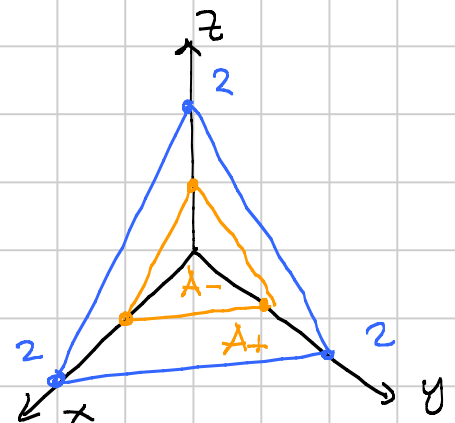
$\uparrow$ normale asse x $\uparrow$ normale asse y

[Controllare che venga uguale a quello dell'altra volta]
[Osservare che $y=1$]

Esempio 2 A dato dalle relazioni

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 2$$

$$\iiint_A |x+y+z-1| dx dy dz$$



1° modo Scompongo con A_+ e A_-

$$\underbrace{\iiint_A (x+y+z-1)}_{\text{si fa facile}} = \iiint_{A_+} (x+y+z-1) + \iiint_{A_-} (x+y+z-1)$$

$$\Rightarrow \iiint_{A_+} (x+y+z-1) = \iiint_A - \iiint_{A_-}$$

$$\begin{aligned} \iiint_A |x+y+z-1| dx dy dz &= \iiint_{A_+} (x+y+z-1) \dots - \iiint_{A_-} (x+y+z-1) \\ &= \iiint_A (x+y+z-1) - 2 \iiint_{A_-} (x+y+z-1) \end{aligned}$$

= si fanno entrambi come insieme normali
cioè per colonne. Ad esempio

$$\iiint_A (x+y+z-1) = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} (x+y+z-1) dz = \text{solo conti.}$$

2° modo Se volessi davvero calcolare l'integrale su A_- direttamente, senza scriverlo per differenza, dovrei fare

$$\iiint_{A_-} \dots = \iint_{B_1} dx dy \int_{1-x-y}^{2-x-y} dz \dots$$

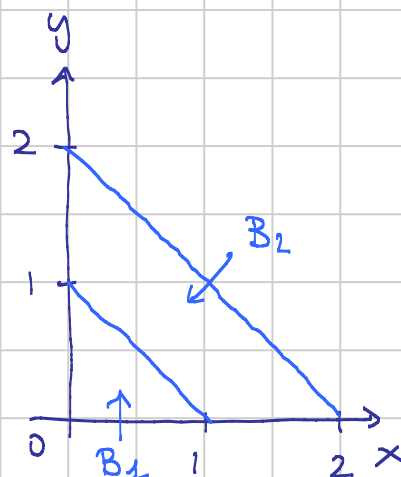
$$+ \iint_{B_2} dx dy \int_0^{2-x-y} dz \dots$$

Ora

$$\iint_{B_1} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \dots$$

$$\iint_{B_2} dx dy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} dy \dots + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy \dots$$

sono conti più lunghi, ma fattibili.



3° modo

Cambio di variabili

$$x = u$$

$$y = v$$

$$x+y+z = w$$

$$z = w - u - v$$

$$x \geq 0$$

$$\leadsto u \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$\leadsto v \geq 0$$

$$z \geq 0$$

$$\leadsto w - u - v \geq 0$$

$$x+y+z \leq 2$$

$$\leadsto w \leq 2$$

$$u+v \leq w$$

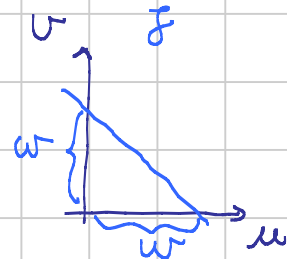
Descrizione della
sezione a w
fisso!!

Quindi procedendo per sezioni

$$\iiint_A |x+y+z-1| dx dy dz = \int_0^2 dw \iint_{S_w} dv du |w-1|$$

$$= \int_0^2 dw |w-1| \text{Area}(S_w)$$

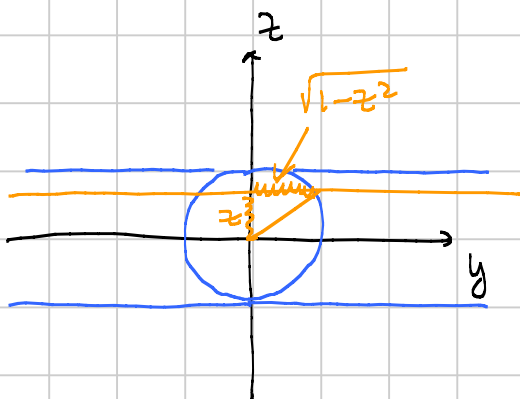
$$= \frac{1}{2} \int_0^2 w^2 |w-1| dw = \text{si fa facile.}$$



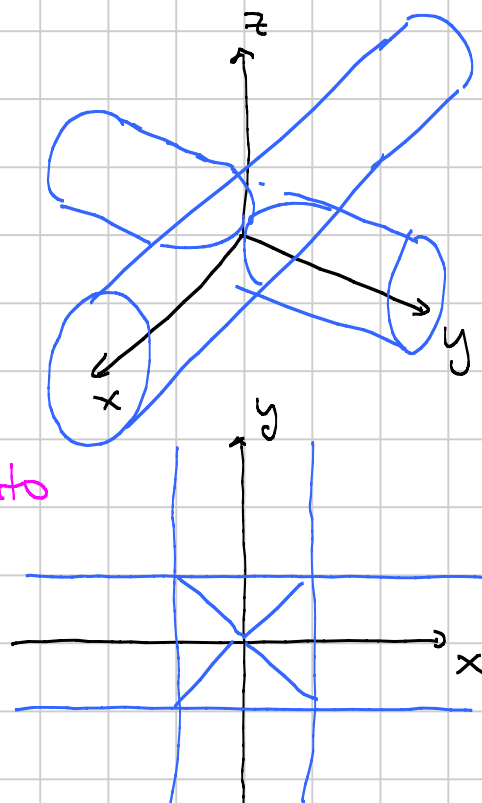
[Controllare che i vari procedimenti diano lo stesso risultato].

Esempio 3 Intersezione di 2 cilindri con raggio uguale
e assi perpendicolari.

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \leq 1, x^2+z^2 \leq 1\}$$



Dall'alto



Devo calcolare $\text{Vol}(A) = \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$

1° modo Per sezioni lungo asse z

$$\text{Vol} = \int_{-1}^1 dz \iint_{S_z} dx \, dy = \int_{-1}^1 \text{Area}(S_z) \, dz$$

Chi è S_z ? Fissato z , le equazioni diventano

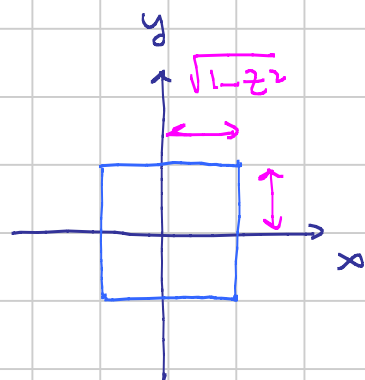
$$x^2 \leq 1 - z^2$$

$$y^2 \leq 1 - z^2$$

$$|x| \leq \sqrt{1 - z^2}$$

$$|y| \leq \sqrt{1 - z^2}$$

Quadrato!



(Coerente con l'oss. geometrica che tagliando i cilindri con un piano ad altezza z ottengo strisce di semiampiezza $\sqrt{1 - z^2}$)

$$\text{Vol} = 4 \int_{-1}^1 (1 - z^2) \, dz = \text{si fa}$$

2° modo Per colonne

Base: quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Fissati $(x, y) \in \text{Base}$, dove varia z ?

$$z^2 \leq 1 - x^2$$

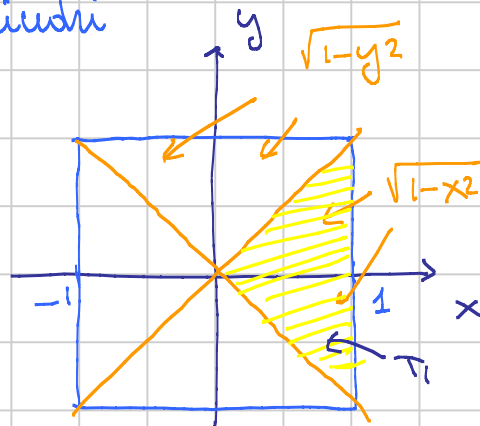
$$z^2 \leq 1 - y^2 \quad \Rightarrow \quad |z| \leq \min \{ \sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - y^2} \}$$

equazioni dei due cilindri

$$\text{Vol} = 4 \iint_{T_1} dx \, dy \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz$$

$$= 8 \iint_{T_1} dx \, dy \sqrt{1 - x^2}$$

$$= 16 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \sqrt{1 - x^2}$$



$$= 16 \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = 16 \left[\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_{x=0}^{x=1}$$

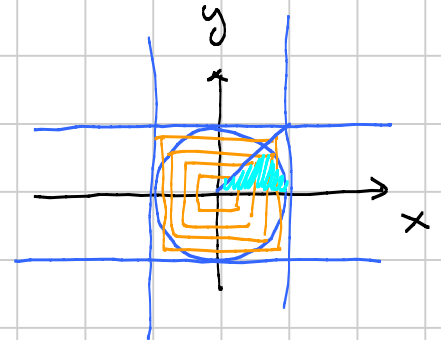
= si fa
— o — o —

Esempio 4 Aggiungiamo il 3° cilindro 😊

$$x^2 + z^2 \leq 1$$

$$y^2 + z^2 \leq 1$$

$$x^2 + y^2 \leq 1$$



[Cercare di farsi un'idea di cosa viene fuori]

[Cercare di capire perché viene male per sezioni: si tratterebbe di intersecare i vecchi quadrati con il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$]

Quello che si salva è il metodo per colonne

$$\text{Vol} = 16 \iint_{\text{Settore}} \sqrt{1-x^2} dx dy$$

$$= 16 \int_0^1 dp \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \sqrt{1-p^2 \cos^2 \theta} p$$

$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 dp p \sqrt{1-p^2 \cos^2 \theta}$$

$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \left[\frac{2}{3} (1-p^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2 \cos^2 \theta}\right) \right]_{p=0}^{p=1}$$

Fare verifica che sia primitiva!

$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \left[-\frac{1}{3} \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \sin^3 \theta + \frac{1}{3 \cos^2 \theta} \right]$$

— o — o —

e questo in qualche modo si fa