

Esempio 1 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - y \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$

$$\iint_A x \, dx \, dy$$

$$\iint_A y \, dx \, dy$$

↓ 0 per simmetria (integrandi DISPARI e se cambio x con $-x$ l'insieme resta lo stesso)

Idea: cercare di capire A in coord. polari

$$\rho^2 - \rho \sin \theta \leq \rho$$

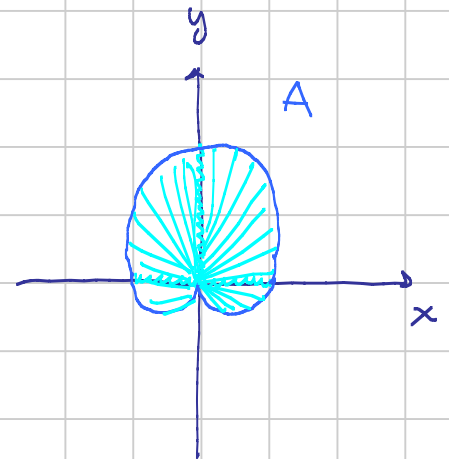
Posso semplificare ρ essendo > 0 tranne nell'origine

$$\rho - \sin \theta \leq 1 \quad \leadsto \quad \rho \leq 1 + \sin \theta$$

Quindi A si descrive come

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$0 \leq \rho \leq 1 + \sin \theta$$



quindi A è "normale rispetto a θ "

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1+\sin \theta} \rho \, d\rho \underbrace{\frac{\rho \sin \theta}{\rho}}_y \uparrow \rho$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{1+\sin \theta} \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \sin \theta (1 + \sin \theta)^3 \, d\theta = \text{si fa.}$$

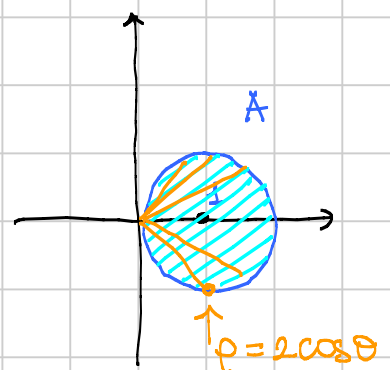
Esempio 2 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

$$x - 2x + 1 + y^2 \leq 1$$

$$\underbrace{(x-1)^2 + y^2}_{u} \leq 0$$

$$\iint_A (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} [(u+1)^2 + v^2] \, du \, dv$$

= tranquillissimo



$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

1° modo Normale asse x

$$= \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy \quad \text{e ora devo fare la primitiva} \quad \text{☹}$$

2° modo Cambio variabili come prima

$$\iint_{u^2+v^2 \leq 1} \sqrt{(u+1)^2+v^2} du dv = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \sqrt{u^2+v^2+2u+1} du dv$$

e anche andando in coord. polari è un disastro ☹

3° modo Osserviamo che la funzione è molto bella in coord. polari $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$
L'insieme è "meno bello", ma forse non malissimo

$$x^2+y^2-2x \leq 0 \leadsto \rho^2-2\rho \cos \theta \leq 0 \leadsto \rho \leq 2 \cos \theta$$

↑ questo ha senso

e $\cos \theta \geq 0$, cioè $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

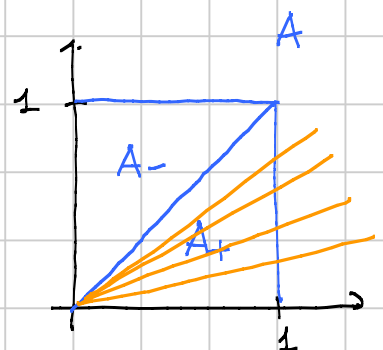
Quindi l'insieme è normale risp. a θ

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} dp \quad p \cdot p$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8 \cos^3 \theta d\theta = \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (1-\sin^2 \theta) d\theta \quad \text{ed è fatta}$$

Esempio 3 $A = [0,1] \times [0,1]$

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$



In coord. cartesiane devo fare la primitiva di $\sqrt{x^2+y^2}$, che si fa (provare!) ma non è piacevole.

Alternativa: provare a descrivere il quadrato in coord. polari !!

$$\iint_A \sqrt{x^2+y^2} dx dy = 2 \iint_{A+} \sqrt{x^2+y^2} dx dy \quad (\text{se scambio } x \text{ con } y \text{ non cambia nulla})$$

In A_+ abbiamo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Dove varia ρ ?

$$x \leq 1 \leadsto \rho \cos \theta \leq 1 \leadsto \rho \leq \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\iint_{A+} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} d\rho \rho \cdot \rho = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta$$

C'è un trucco per le potenze dispari di sin e cos

$$\int \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{(1-\sin^2 \theta)^2} d\theta$$

$$t = \sin \theta \Rightarrow \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \text{si fa.}$$

Esempio 4 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$

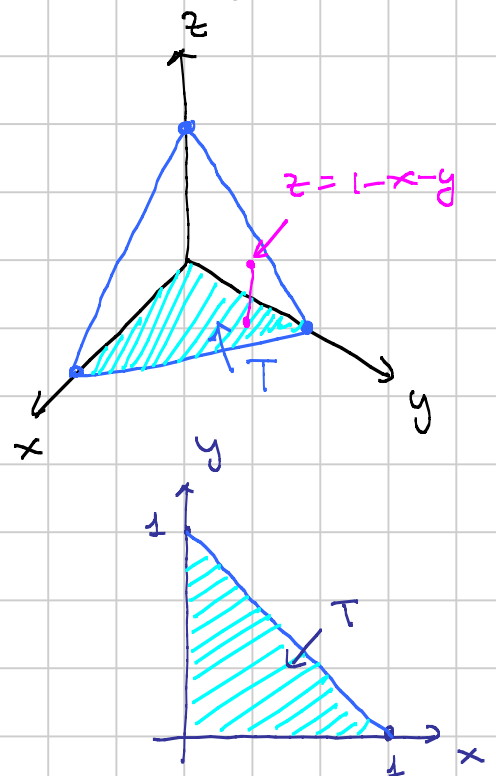
$$\iiint_A x dx dy dz$$

1° modo Per colonne

$$= \iint_T x dx dy \int_0^{1-x-y} dz$$

$$= \iint_T x (1-x-y) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy x (1-x-y) = \text{si fa}$$



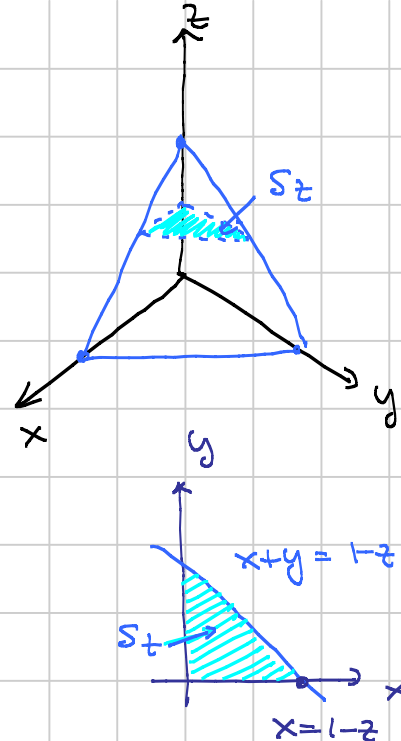
2° modo Per sezioni lungo asse z

$$= \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx dy \quad x$$

Come descrivo S_z ? $x \geq 0, y \geq 0$
 $x+y \leq 1-z$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \quad x \int_0^{1-z-x} dy$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} x (1-z-x) dx = \text{si fa e dovrebbe coincidere}$$



3° modo Sezioni lungo asse x , oppure sezioni lungo asse z
 ma dopo aver osservato che $\iiint x = \iiint z$ per
 simmetria

$$\iiint_{\text{tetra}} x dx dy dz = \iiint_{\text{tetra}} z dx dy dz = \int_0^1 z dz \text{Area}(S_z) = \frac{1}{2} (1-z)^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 z (1-z)^2 dz = \text{si fa banalmente}$$

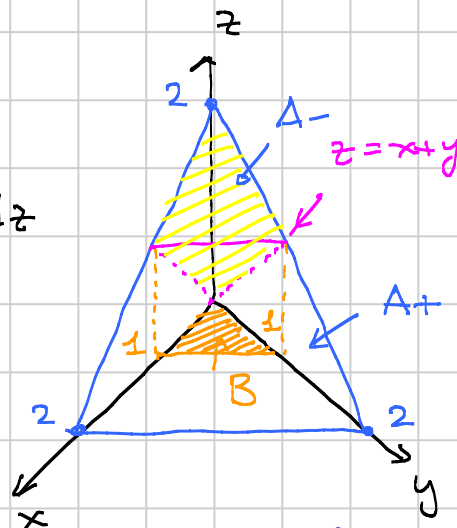
Esempio 5 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 2\}$

$$\iiint_A |x+y-z| dx dy dz$$

$$= \iiint_{A^+} (x+y-z) dx dy dz - \iiint_{A^-} (x+y-z) dx dy dz$$

A_- si scrive bene, A_+ è fatto da tantissimi pezzi

$$A_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y \leq z \leq 2-x-y, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$$



Dovendo valere $x+y \leq 2-x-y$, allora di sicuro $x+y \leq 1$

Osservo che $\iiint_A (x+y-z) \dots = \iiint_{A^+} (x+y-z) \dots + \iiint_{A^-} (x+y-z) \dots$

e quindi $\iiint_{A^+} (x+y-z) \dots = \iiint_A (x+y-z) \dots - \iiint_{A^-} (x+y-z) \dots$

e in conclusione

$$\iiint_A |x+y-z| dx dy dz = \iiint_A (x+y-z) dx dy dz - 2 \iiint_{A^-} (x+y-z)$$

Questi si scrivono per colonne

$$\iiint_A \dots = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} dz \dots$$

$$\iiint_{A^-} \dots = \underbrace{\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy}_{\text{Base B}} \int_{x+y}^{2-x-y} dz \dots$$

e questi si fanno !!!

Metodo alternativo: provare con un cambio di variabili
oppure provare a scrivere A^+ spezzandolo
in un numero sufficiente di parti
— 0 — 0 —