

Prerequisiti: un retrogusto di coordinate cilindriche
sostituire (x,y) con le polari

Esempio 1 (Corno rovesciato)

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,3], x^2+y^2 \leq z^2\}$$

$$\iiint_C z^2 dx dy dz$$

Modo per vedere che è un corno: ragionare per sezioni. Fissato $z \in [0,3]$ la sezione

$$S_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq z^2\} = \text{cerchio di raggio } z$$

(raggio dipende linearmente dall'altezza)

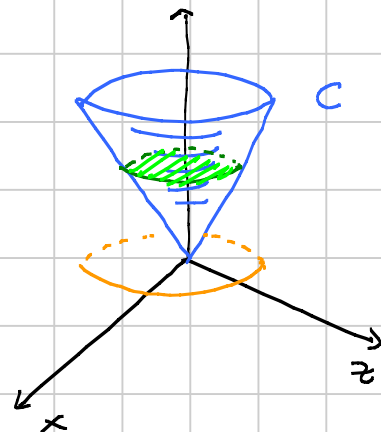
sezioni

$$\begin{aligned} \iiint_C z^2 dx dy dz &= \int_0^3 dz z^2 \iint_{S_z} dx dy = \int_0^3 z^2 \cdot \text{Area}(S_z) dz \\ &= \pi \int_0^3 z^4 dz = \frac{\pi}{5} \cdot 3^5 \end{aligned}$$

Si poteva fare per colonne? Con un po' di pazienza forse sì.

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2 \leq 9}_{\text{base}}, \underbrace{\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 3}_{\text{colonna sul p.to } (x,y)}\}$$

$$\begin{aligned} \iiint_C z^2 dx dy dz &= \iint_{\text{base}} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^3 z^2 dz = \frac{1}{3} \iint_{\text{base}} dx dy [z^3]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=3} \\ &= \frac{1}{3} \iint_{\text{base}} dx dy (27 - (x^2+y^2)^{3/2}) = 9 \text{ Area(Base)} - \frac{1}{3} \iint_{\text{base}} (x^2+y^2)^{3/2} dx dy \end{aligned}$$



$$= 9 \cdot 9\pi - \frac{1}{3} \int_0^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p^3 \cdot p = 81\pi - \frac{2\pi}{3} \int_0^3 p^4 dp$$

$$= 81\pi - \frac{2\pi}{3} \frac{1}{5} 3^5$$

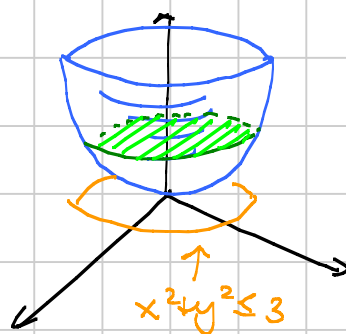
$$= 81\pi \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 81\pi \cdot \frac{3}{5} \quad \text{☺}$$

Esempio 2 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 3], \underbrace{x^2 + y^2 \leq z}_{\text{paraboloide}}\}$

$$\iiint_A z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$$

per sezioni $= \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx \, dy \sqrt{x^2 + y^2} \cdot z$

↑
cerchio di raggio $\sqrt{z}$



$$= \int_0^3 z \, dz \iint_{S_z} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^3 z \, dz \int_0^{\sqrt{z}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p \cdot p$$

$$= \int_0^3 z \, dz \int_0^{\sqrt{z}} p^2 dp \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = 2\pi \frac{1}{3} \int_0^3 z \, dz [p^3]_{p=0}^{p=\sqrt{z}}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^3 z^{\frac{5}{2}} dz = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2}{7} \left[z^{\frac{7}{2}} \right]_0^3$$

per colonne bisogna scrivere A come insieme normale

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 3}_{\text{base}}, \underbrace{x^2 + y^2 \leq z \leq 3}_{\text{colonna}}\}$$

$$\iiint_A z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\text{base}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \int_{x^2 + y^2}^3 z \, dz$$

$$= \iint_{\text{base}} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{1}{2} [z^2]_{z=x^2+y^2}^{z=3} dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_{\text{base}} \sqrt{x^2 + y^2} (9 - (x^2 + y^2)^2) dx \, dy$$

[Qualche conto corretto dopo i video]

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p(9-p^4) p = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (9p^2 - p^6) dp$$

$$= \pi \left[3p^3 - \frac{1}{7} p^7 \right]_{p=0}^{p=\sqrt{3}}$$

= controllare i conti

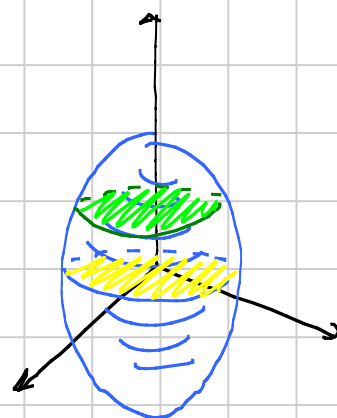
Descrizione diretta di A in coord. cilindriche
 $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 3]$, $0 \leq p \leq \sqrt{z}$

Esempio 3 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^4 \leq 9\}$ $\iiint_A z \, dx \, dy \, dz$

A si capisce bene per sezioni. È evidente che $-\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{3}$.
 Fissato z , la sezione S_z è $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9 - z^4\}$
 cerchio di raggio $\sqrt{9 - z^4}$

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz \, z \, \text{Area}(S_z)$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} z (9 - z^4) \pi \, dz = 0 \quad \text{perché è dispari in } z$$



Uhm: bella scoperta! Potrei dire che veniva = 0 per simmetria sulla figura iniziale

$$\iiint_A |z| \, dx \, dy \, dz = 2 \underbrace{\int_0^{\sqrt{3}} dz \cdot z \cdot \text{Area}(S_z)}_{\text{metà alta}} = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} z (9 - z^4) \, dz = \text{si fa}$$

Si poteva fare anche per colonne, forse...

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 9}_{\text{base}}, \underbrace{-\sqrt[4]{9 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt[4]{9 - x^2 - y^2}}_{\text{colonna}} \}$$

$$\iiint_A |z| dx dy dz = 2 \iint_{\text{base}} dx dy \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z dz$$

$$= \iint_{\text{base}} dx dy \sqrt{9-x^2-y^2} = \int_0^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{9-p^2} p$$

$$= 2\pi \left[- (9-p^2)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \frac{1}{2} \right]_{p=0}^{p=3} = \text{finire e controllare che venga = a prima :)} \\ \text{VERIFICA}$$

$$\iiint_A |x| dx dy dz = \int_0^3 dz \iint_{S_z} |x| dx dy$$

↑
sezioni

$$= \int_0^3 dz \int_0^{\sqrt{9-z^2}} dp \int_0^{2\pi} d\theta p |\cos\theta| \cdot p$$

]—————[
scrittura in coord. cilindriche

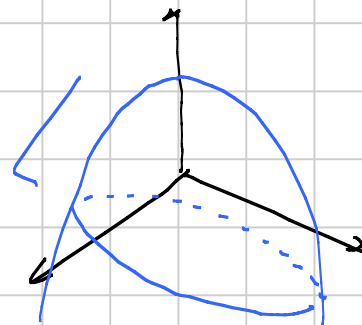
Per esercizio scrivere lo stesso per colonne (è probabile che alla fine la primitiva non sia elementare)

Esempio 4 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 - x^2 - y^2 \geq z \geq 2x + 2y\}$

$$\iiint_A 1 dx dy dz = \text{volume di } z \quad \left(\int_a^b 1 dx = \text{lunghezza intervallo} \right) \\ \iint_A 1 dx dy = \text{Area}(A)$$

Come è fatto A ? La relazione data è la descrizione di una colonna

paraboloidi rovesc. $\geq z \geq$ piano



Manca di descrivere la base. Devo capire dove si intersecano i grafici

$$2 - x^2 - y^2 = 2x + 2y \leadsto x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 + 1 = 4$$

$$\underbrace{(x+1)^2 + (y+1)^2}_{\text{base}} \leq 4$$

$$\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz = \iint_{\text{base}} dx \, dy \int_{\underbrace{2x+2y}_{\text{lungh. della colonna}}}^{2-x^2-y^2} 1 \, dz$$

$$= \iint_{\text{base}} (2 - x^2 - y^2 - 2x - 2y) \, dx \, dy \quad x+1 = u \quad y+1 = v$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (2 - (u-1)^2 - (v-1)^2 - 2(u-1) - 2(v-1)) \, dx \, dy$$

$$\cancel{2} - u^2 + \cancel{2u} - \cancel{1} - v^2 + \cancel{2v} - \cancel{1} - \cancel{2u} + 2 - \cancel{2v} + 2$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (4 - u^2 - v^2) \, du \, dv = \int_0^2 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (4 - \rho^2) \rho$$

$$= 2\pi \int_0^2 (4\rho - \rho^3) \, d\rho = \text{si fa}$$

— 0 — 0 —