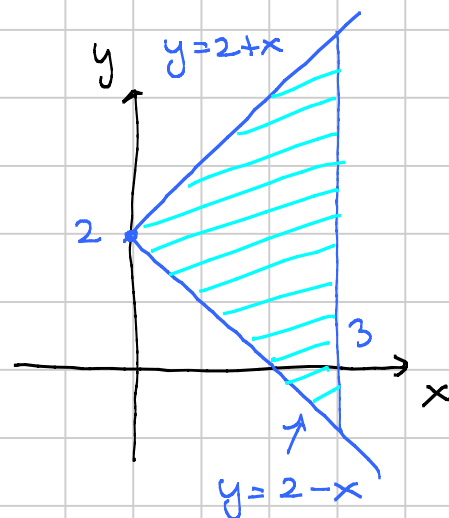


Cambi di variabile negli integrali doppi (Lezione 28 di AM2-14)

Esempio 1 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y-2| \leq x \leq 3\}$

$$\iint_A (y-2) dx dy \quad \iint_A x^{\frac{7}{2}} dx dy$$

Entrambi gli integrali si fanno facilmente scrivendo A come insieme normale risp. asse x



Tuttavia potremmo porre

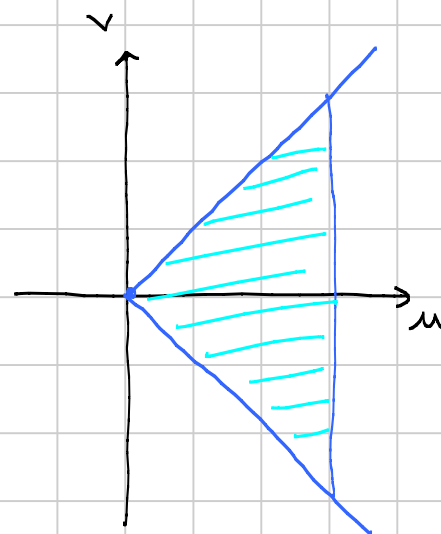
$$x = u \quad y - 2 = v$$

[Corretto dopo video]

In questo modo

$$A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |v| \leq u \leq 3\}$$

In poche parole, abbiamo spostato l'origine nel vertice del triangolo



$$\iint_A (y-2) dx dy = \iint_{\text{nuovo } A} v J(u, v) du dv$$

$\uparrow$ nuovo A $\uparrow$ pagamento da calcolare
 $|v| \leq u \leq 3$ [Dopo video]

Calcolo $J(u, v)$:

① Ricavare $x = u \quad y = v + 2$

② Costruire matrice Jacobiana $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

③ $J(u, v) = |\text{Det}| = 1$

L'integrale diventa $\iint_{\text{nuovo } A} v du dv = 0$ per simmetria

Analogamente per il 2° integrale:

$$\begin{aligned}\iint_A x^7 dx dy &= \iint_{\text{nuovo } A} u^7 \cdot 1 \cdot du dv = \int_0^3 du \int_{-u}^u dv u^7 \\ &= \int_0^3 u^7 du \int_{-u}^u dv = 2 \int_0^3 u^8 du = \text{si fa.}\end{aligned}$$

Esempio 2 $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 4 \}$
 circ. con centro in $(2, -3)$ e raggio 2

$$\iint_C x dx dy \quad \iint_C y^2 dx dy$$

Uno vorrebbe portare il centro nell'origine e usare coord. polari

$$x-2 = u \quad y+3 = v \quad u^2 + v^2 \leq 4$$

$$\begin{aligned}\iint_C x dx dy &= \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (u+2) \underbrace{J(u, v)}_1 du dv \\ &= \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (u+2) du dv = 2 \text{ Area}(C) = 2 \cdot 4\pi = 8\pi \\ &\quad \uparrow \\ &\quad = 0 \text{ per simmetria}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_C y^2 dx dy &= \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (v-3)^2 du dv = \int_{u^2+v^2 \leq 4} (v^2 - 6v + 9) du dv \\ &\quad \downarrow \quad \swarrow \text{9 Area} \\ &\quad \text{per simm}\end{aligned}$$

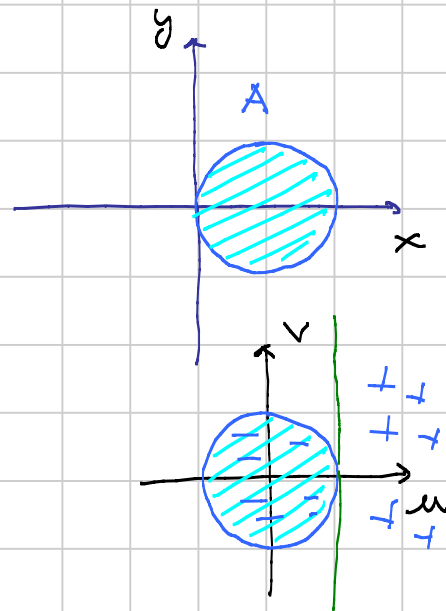
$$= 9 \cdot 4\pi + \underbrace{\iint_{u^2+v^2 \leq 4} v^2 du dv}_{\text{coord. polari}}$$

$$\begin{aligned}&= 36\pi + \int_0^2 dp \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{p^2 \sin^2 \theta}_{\substack{\uparrow \\ \text{pag. delle} \\ \text{polari}}} \cdot p = 36\pi + \underbrace{\int_0^2 p^3 dp}_4 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{11} \\ &= 40\pi\end{aligned}$$

Esempio 3 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$

$$\iint_A |x-2| dx dy$$

Come è fatto A? $x^2 - 2x + y^2 \leq 0$
 $x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1$
 $\underbrace{(x-1)}_u^2 + \underbrace{y^2}_v \leq 1$



$$\iint_A |x-2| dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} |u-1| \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ J(u,v)}}{1} du dv$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (1-u) du dv = \text{Area} = \pi \quad \text{😊}$$

$\downarrow$
= 0 per simmetria

Fatto generale Quando il cambio di variabili è una trasformazione AFFINE, allora $J(u,v) = |\text{Det}|$ della "parte di matrice" della trasformazione

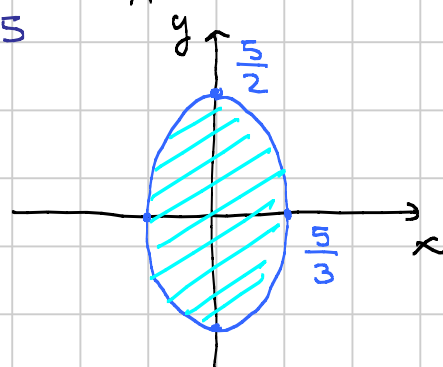
$$\begin{aligned} x &= au + bv + e \\ y &= cu + dv + f \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad J(u,v) = |ad - bc|$$

In particolare, se la trasformazione è una ISOMETRIA, allora di sicuro $J(u,v) = 1$.

Negli esempi precedenti le trasformazioni hanno traslazioni, dunque ISOMETRICHE, dunque NULLA DA PAGARE.

Esempio 4 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 \leq 25\}$
 $\underbrace{(3x)}_u^2 + \underbrace{(2y)}_v^2 \leq 25$

$$\iint_A |xy| dx dy$$



Nelle variabili u e v l'insieme è diventato $u^2 + v^2 \leq 25$, cioè una circ.

Calcoliamo $J(u, v)$

$$\textcircled{1} \quad x = \frac{u}{3} \quad y = \frac{v}{2} \quad \textcircled{2} \quad \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \textcircled{3} \quad J = \frac{1}{6}$$

Ora è fatta

$$\iint_A |xy| dx dy = \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 25 \\ \text{Nuovo } A}} \left| \frac{u}{3} \frac{v}{2} \right| \cdot \frac{1}{6} du dv$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $x \quad y \quad J$

$$= \frac{1}{36} \iint_{u^2+v^2 \leq 25} |uv| du dv = \frac{4}{36} \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 25 \\ u \geq 0, v \geq 0}} uv du dv$$

$$= \frac{1}{9} \underbrace{\int_0^5 dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta}_{\text{1° quadrante}} \underbrace{p \cos \theta \cdot p \sin \theta \cdot p}_{J \text{ delle p.dan'}}$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^5 p^3 dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos \theta \cdot \sin \theta}_{\text{La primitiva è } \frac{1}{2} \sin^2 \theta \text{ e poi è storia.}} d\theta$$

Esempio 5 $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 5y \}$

$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$$

$$x^2 + 4y^2 - 5y \leq 0 ; \quad x^2 + 4y^2 - 5y + \frac{25}{16} \leq \frac{25}{16}$$

$$\underbrace{(x)^2}_{\parallel u} + \underbrace{\left(2y - \frac{5}{4}\right)^2}_{\parallel v} \leq \frac{25}{16} \quad [\text{Verifica !!!}]$$

Poniamo $x = u$ $2y - \frac{5}{4} = v$ e $\mathcal{Q}$ insieme diventa $u^2 + v^2 \leq \frac{25}{16}$

$$\text{Calcolo } J(u, v): \quad \begin{matrix} x = u \\ y = \frac{v}{2} + \frac{5}{8} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow J(u, v) = \frac{1}{2}$$

$$\iint_A (x^2 y^2) dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq \frac{25}{16}} \left\{ u^2 + \left(\frac{v}{2} + \frac{5}{8} \right)^2 \right\} \cdot \frac{1}{2} du dv$$

[Corretto dopo video]

$$= \frac{1}{2} \iint_{u^2+v^2 \leq \frac{25}{16}} \left(u^2 + \frac{v^2}{4} + \frac{25}{64} + \frac{5}{8} v \right) du dv$$

"0 per simmetria"

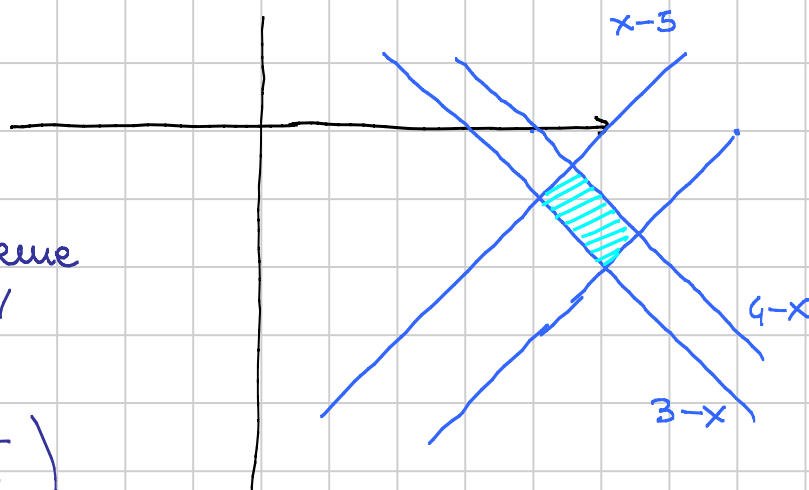
$$= \frac{25}{32} \cdot \text{Area (cerchio)} + \frac{1}{2} \iint_{u^2+v^2 \leq \frac{25}{16}} \left(u^2 + \frac{v^2}{4} \right)$$

$$= \frac{5}{4} \iint_{\dots} u^2 du dv \text{ e questo si fa}$$

Esempio 6 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{3 \leq x+y \leq 4}_u, \underbrace{5 \leq x-y \leq 7}_v\}$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy$$

L'insieme è un rettangolo ruotato, e si scrive come l'insieme normale usando tanti pezzi !!!
"3"



$$\begin{aligned} u &= x+y & x &= \frac{u+v}{2} \\ v &= x-y & y &= \frac{u-v}{2} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad J(u,v) = \frac{1}{2}$$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \iint_{\substack{3 \leq u \leq 4 \\ 5 \leq v \leq 7}} \underbrace{uv}_{(x^2 - y^2)} \cdot \frac{1}{2} du dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_3^4 du \int_5^7 dv uv = \frac{1}{2} \int_3^4 u du \int_5^7 v dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (16-9) (49-25).$$



— 0 — 0 —