

Integrali doppi su rettangoli [Vedi Oss. 22 e 23 di AM2-14]

Se $A = [a, b] \times [c, d]$, allora

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y)$$

Esempio 1 $A = [0, 1] \times [0, 1]$ $\iint_A (x+y) dx dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$\iint_A x dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 dy x = \int_0^1 dx [xy]_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 dx x = \frac{1}{2}$$

primitiva di x rispetto a y

$$\iint_A y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 dy y = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$$

primitiva di y rispetto a y

Oss 1 Nel calcolare il 1° integrale potevo osservare che x è una costante quando integro in dy , quindi

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \quad \text{(x)} = \int_0^1 x dx \underbrace{\int_0^1 1 \cdot dy}_{\text{lungh. interv.}} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Oss 2 Gli integrali di x e y sono venuti uguali. C'è un motivo. Infatti geometricamente rappresentano volumi uguali (pensare ai 2 grafici).

Formalmente, se consideriamo la trasformazione

$$(x, y) \rightarrow (y, x) \quad \text{(simmetria rispetto alla bisettrice } y=x)$$

accadono due cose

- trasforma le 2 integrande l'una nell'altra
- manda lì insieme A in se stesso.

Esempio 2

$$A = [0, 1] \times [0, 3]$$

$$\iint_A xy^2 dx dy$$

1° modo

$$\int_0^1 dx \int_0^3 dy xy^2 = \int_0^1 x dx \int_0^3 y^2 dy = \int_0^1 x dx \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=3}$$
$$= \int_0^1 x \cdot 9 dx = \left[\frac{9}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{9}{2}}$$

2° modo

$$\int_0^3 dy \int_0^1 dx xy^2 = \int_0^3 y^2 dy \int_0^1 x dx = \int_0^3 y^2 dy \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \int_0^3 y^2 \cdot \frac{1}{2} dy = \left[\frac{1}{6} y^3 \right]_{y=0}^{y=3} = \boxed{\frac{9}{2}} \quad \text{😊}$$

Oss. È sempre una buona verifica calcolare un integrale in due modi diversi.

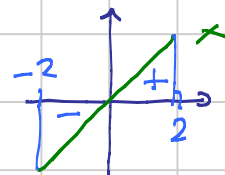
Esempio 3

$$A = [-2, 2] \times [0, 1]$$

$$\iint_A xy^2 dx dy$$

1° modo

$$\int_{-2}^2 dx \int_0^1 dy xy^2 = \int_{-2}^2 x dx \int_0^1 y^2 dy = \int_{-2}^2 x dx \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=1}$$
$$= \frac{1}{3} \int_{-2}^2 x dx = 0$$



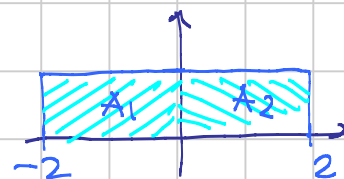
2° modo Era prevedibile che veniva 0 per

QUESTIONE DI SIMMETRIA. Si tratta di osservare che

- La funzione $f(x, y) = xy^2$ è DISPARI nella variabile x cioè $f(-x, y) = -f(x, y)$ (cambia segno se $x \rightarrow -x$)
- L'insieme A di integrazione è simmetrico risp. all'asse y , cioè non cambia rispetto alla trasformazione $(x, y) \rightarrow (-x, y)$

Brutalmente: tanto $f(x, y)$ è positiva in A_2 quanto $f(x, y)$ è negativa in A_1 .

Quindi i due contributi si compensano.



Per convincersene formalmente basta usare la formula che integra all'interno risp. alla variabile x .

Esempio 4 $A = [0,1] \times [1,2]$

$f(x,y) = \log y$

1° modo $\int_0^1 dx \int_1^2 dy \log y = \int_0^1 dx \left[y \log y - y \right]_{y=1}^{y=2}$

verificare derivando che
sia davvero una primitiva

$= \int_0^1 dx (2 \log 2 - 2 + 1)$

$= (2 \log 2 - 1) \int_0^1 dx = 2 \log 2 - 1$

2° modo $\int_1^2 dy \int_0^1 dx \log y = \int_1^2 \log y dy \int_0^1 dx = \int_1^2 \log y dy$
lung. interv. = 1
 $=$ finale come sopra.

Esempio 5 $A = [-1,0] \times [0,3]$

$f(x,y) = e^{x+2y}$

1° modo $\int_{-1}^0 dx \int_0^3 dy \underbrace{e^{x+2y}}_{e^x \cdot e^{2y}} = \int_{-1}^0 e^x dx \int_0^3 e^{2y} dy$

$= \int_{-1}^0 e^x dx \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_{y=0}^{y=3} = \frac{1}{2} (e^6 - 1) \int_{-1}^0 e^x dx = \frac{1}{2} (e^6 - 1) [e^x]_{-1}^0 = \frac{1}{2} (e^6 - 1) \left(1 - \frac{1}{e} \right)$

2° modo $\int_0^3 dy \int_{-1}^0 dx e^{x+2y} = \int_0^3 e^{2y} dy \int_{-1}^0 e^x dx$
 $=$ finale come sopra

Esempio 6 $A = [0,1] \times [1,2]$ $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$

Osserviamo che l'integrale è PROPRIO perché $y \in [1,2]$

$\int_1^2 dy \int_0^1 dx \frac{x}{y^2} = \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy \underbrace{\int_0^1 x dx}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=1}^{y=2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4}$

Oss. importante Nell'esempio precedente sapevo a priori che l'integrale era un numero POSITIVO dal momento che $f(x,y) \geq 0$ e non identicamente nulla in A ($x \in [0,1]$).

NON PROVARE NEMMENO A SCRIVERE RISULTATI NEGATIVI !!!

Esempio 7 $A = [0,2] \times [0,\pi]$ $f(x,y) = \frac{\sin(3y)}{4+x^2}$

$$\int_0^2 dx \int_0^\pi dy \frac{\sin(3y)}{4+x^2} = \int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx \int_0^\pi \sin(3y) dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx \left[-\frac{1}{3} \cos(3y) \right]_{y=0}^{y=\pi} = \int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx \left[-\frac{1}{3} \cos(3\pi) + \frac{1}{3} \cos 0 \right]$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{2}{3} \frac{1}{4} \int_0^2 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{2}{3} \cancel{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{3} \left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{3} \arctan(1) = \frac{\pi}{12}.$$

Oss. Forse è ora di ripassare le primitive (vedi les. AM 1)

Esempio 8 $A = [0,2] \times [0,1]$ $f(x,y) = x^2 + \arctan y$

$$\int_0^2 dx \int_0^1 dy x^2 = \int_0^2 x^2 dx \underbrace{\int_0^1 1 dy}_{=1} = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{3}$$

$$\iint_A \arctan y dy = \int_0^1 dy \arctan y \int_0^2 1 dx = 2 \int_0^1 \arctan y dy$$

$$= 2 \left[y \arctan y \right]_{y=0}^{y=1} - 2 \int_0^1 \frac{y}{1+y^2} dy$$

↑
per parti

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \left[\log(1+y^2) \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{\pi}{2} - \log 2$$

Da ricordare: $\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$

si fa con la tecnica "dell'1 nascosto".

Esempio 9 $A = [0, 1] \times [-2, 2]$

$$f(x, y) = \arctan(xy^{3/4})$$

$$\int_A \arctan(xy^{3/4}) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-2}^2 dy \underbrace{\arctan(xy^{3/4})}$$

di questa dovremmo fare la primitiva, che teoricamente si può fare

MA in questo caso l'integrale fa 0 per simmetria, poiché

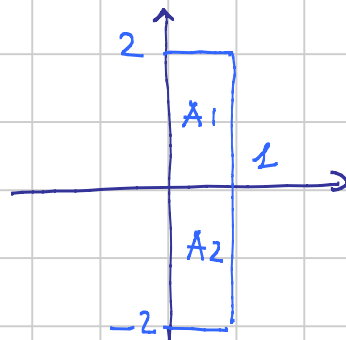
- $f(x, y)$ è DISPARI rispetto alla variabile y , cioè

$$f(x, -y) = -f(x, y)$$

($\arctan$ è dispari e $3/4$ è esponente dispari)

- L'insieme A è simm. rispetto all'asse x (cioè non varia quando cambio y con $-y$)

Tanto l'integrale è positivo in A_1 ,
quanto è negativo in A_2 .



— 0 — 0 —