

Prerequisiti: tutto fino alla lezione 21 di AM2-14
+ coordinate sferiche nello spazio (lezione 23).

Esempio 1 $f(x,y) = (x^6 y^6 + y^{15})$ Studio locale vicino a $(0,0)$

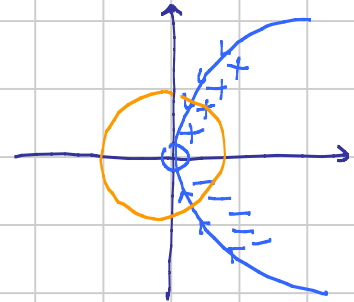
Taylor: $f(x,y) = \underbrace{x^6 y^6}_{\geq 0} + o(\rho^{12})$
PERÒ NON BASTA!!

(Basterebbe se ci fosse $x^{12} + y^{12}$ o $x^6 + y^6$)

Il termine successivo è importante ai fini del segno

$$f(t^2, t) = t^{18} + t^{15} = t^5 + o(t^{18})$$

↑
questo comanda
e decide il segno



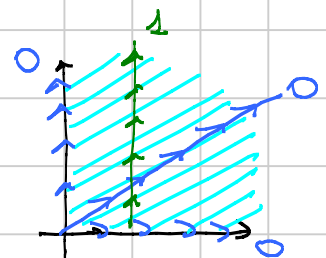
$\Rightarrow (0,0)$ è un p.to di sella.

Inf/sup su $\mathbb{R}^2$: $\sup = +\infty$ $\inf = -\infty$

$f(0,t) = t^{15}$ $t \rightarrow +\infty$
 $t \rightarrow -\infty$

Esempio 2 $f(x,y) = \frac{xy^2}{1+x^2y^2}$

• lim all'infinito con dominio $x \geq 0$ $y \geq 0$



[In polari sembra del tipo $\frac{\rho^3}{\rho^4}$, MA IL ρ^4 al denominatore è abusivo 😞]

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0)$ per $m=0$ è speciale

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{m^2 t^3}{1 + m^2 t^4} = 0$ per ogni $m \geq 0$

Su tutte le rette uscenti dall'origine il limite è 0.
Proviamo sulle parabole $y = ax^2$

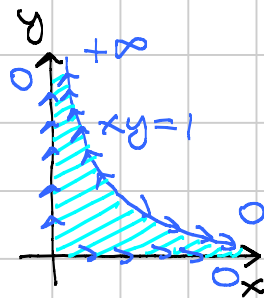
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, at^2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2 t^5}{1 + a^2 t^6} = 0 \quad \text{Uhm...}$$

In realtà il limite non è 0 !!!

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(1, t) = \frac{t^2}{1 + t^2} = 1 \quad \text{GULP!}$$

- lim all'infinito con dominio $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1$

Se il limite esiste, allora è 0.

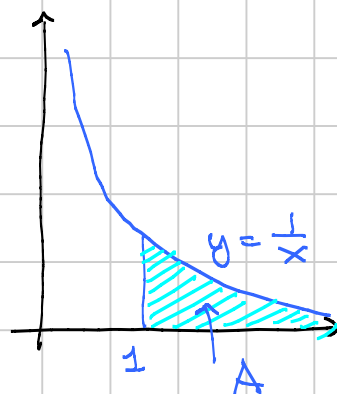


$$f(t, \frac{1}{t}) = \frac{\frac{1}{t}}{1+1} = \frac{1}{2t} \quad \begin{array}{l} \text{per } t \rightarrow +\infty \text{ tende a } 0 \\ \text{per } t \rightarrow 0^+ \text{ tende a } +\infty \end{array}$$

[Esplorare con il computer lungo asse y]

- limite all'infinito con dominio $x \geq 1, y \geq 0, xy \leq 1$

Qui il limite potrebbe essere 0.



$$0 \leq \frac{xy^2}{1+x^2y^2} \leq \frac{x \cdot \frac{1}{x^2}}{1} = \frac{1}{x}$$

Mi basta dimostrare che x tende a $+\infty$ quando $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$
E siamo nella zona indicata, cosa abbastanza intuitiva

$$\textcircled{x} = \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2+y^2-y^2} \geq \sqrt{x^2+y^2-1}$$

$\uparrow$
 vera in A
 perché $0 \leq y \leq 1$

$\downarrow$ $+\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$

∞ in A

— 0 — 0 —

Esempio 3 Max/min di $f(x,y,z) = y+z-x^2$
 sull'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$

• L'insieme è compatto, quindi per W max e min esistono

• $\forall f$ esiste sempre e non si annulla mai
 $\Rightarrow$ niente stat. interni e niente sing. int.

• Bordo, pezzo con $z=1$ (base superiore). Diventa
 $y+1-x^2$

da studiare sul cerchio $x^2+y^2 \leq 1$. Si può fare ad esempio con i moltiplicatori

1° sistema $\leadsto$ nulla

2° sistema
$$\begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$\leadsto x(\lambda+1) = 0$

$\swarrow$
 $x=0$
 $\downarrow$
 $y=\pm 1$

$\swarrow$
 $\lambda = -1$
 $\downarrow$
 $y = -\frac{1}{2}$
 $\downarrow$
 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Abbiamo quindi 4 candidati:

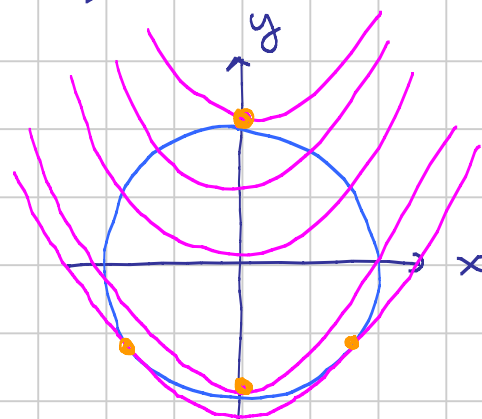
$(0,1) \quad (0,-1) \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Sensato? Verifico con linee di livello

$y+1-x^2 = \lambda \quad y = x^2-1+\lambda$

• Bordo, pezzo paraboloide.

Abbiamo due opzioni



$\rightarrow$ anziché di moltiplicatori con $\phi(x,y) = z - x^2 - y^2$
 $f(x,y) = y + z - x^2$

1° sistema $\leadsto \emptyset$

2° sistema $\leadsto$

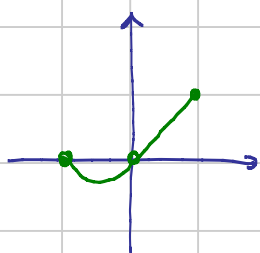
$$\begin{cases} -2x = -2\lambda x \\ 1 = -2\lambda y \\ 1 = \lambda \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$\leadsto$ risolvo e mi limito
a considerare i pti
con $z < 1$

$\rightarrow$ andare di sostituzione del vincolo, cioè studio

$$y + \frac{x^2 + y^2}{z} - x^2 = y + y^2 \leadsto \text{è evidente che il minimo è per } y = -\frac{1}{2}$$

e lo studio solo per $x^2 + y^2 \leq 1$



(verificare che i
moltiplicatori venisse
lo stesso!!)

— o — o —

Esempio 4 $x^2 + y^2 + z^4 + xyz$ Inf / sup / max / min in $\mathbb{R}^3$

Provo un omino esploratore che pareggi gli esponenti

$$p(t^2, t^2, t) = 3t^4 + t^5$$

per $t \rightarrow +\infty$ tende a $+\infty \leadsto \text{sup}$
per $t \rightarrow -\infty$ tende a $-\infty \leadsto \text{inf}$.

Esempio 5 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 z^2 + y^2 \leq 1\}$

Domanda: A è compatto? Intanto è chiuso perché c'è il $\leq$.

Provo a vedere se le coord. sono limitate: di sicuro $-1 \leq y \leq 1$
e $x^4 z^2 \leq 1$, ma questo NON basta.

E infatti l'insieme NON è limitato. Ad esempio il pto
(t, 0, 0) è insieme per ogni t reale

$\uparrow$
asse x

— o — o —