

Punti stazionari e loro classificazione

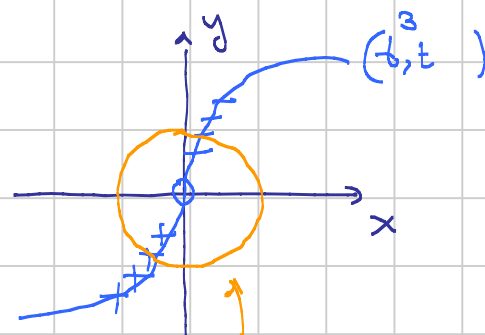
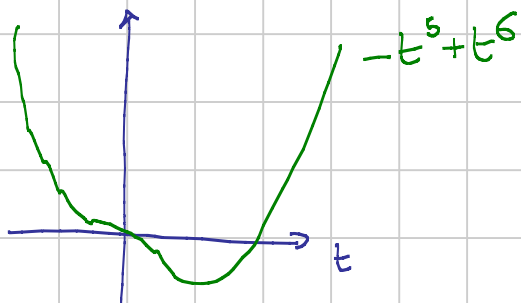
Esempio 1 $x^2 - xy^2 + y^6$ Studiare $(0,0)$

$$f(x,y) = x^2 + o(x^2+y^2) \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ autovalori $\neq 0 \Rightarrow$ di sicuro non è p.to max, ma resta aperto min/sella

NON PENSARE NEMMENO: il termine di 2° grado è sempre ≥ 0 , il resto è 0 piccolo, quindi $(0,0)$ è p.to di min. locale.

Tentiamo un pareggiamento: $f(t^3, t) = t^6 - t^5 + t^6 = -t^5 + 2t^6$



crescono + e -, quindi $(0,0)$ è p.to di sella.

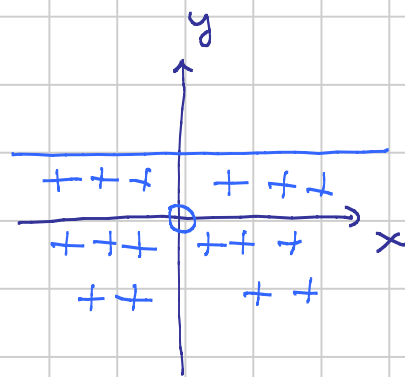
STRATEGIA per dim. che un p.to è di sella: trovare un omino che passa per quel p.to e vede valori di f maggiori e minori di quelli nel p.to stesso.

Esempio 2 $x^2 - x^2y + y^6$ Studiare $(0,0)$

Come prima $f(x,y) = x^2 + o(x^2+y^2)$, quindi restano le stesse poss. di prima (min./sella)

L'ovvio di prima vede $f(t^3, t) = 2t^5 - t^7$, quindi vede un minimo, ma NON BASTA per concludere.

Raccolgo: $f(x, y) = \underbrace{x^2}_{\geq 0} (1-y) + \underbrace{y^6}_{\geq 0} \geq 0$
 ≥ 0 vicino all'origine



Nota bene: vicino all'origine, cioè per $y < 1$,
 vale il segno di $=$ se e solo se $(x, y) = (0, 0)$

Esempio 3 $x^4 + \sin(y^4) + \arctan(x^2 y^3)$ studiare $(0, 0)$

Taylor: $f(x, y) = \underbrace{x^4 + y^4}_{\text{basta per mangiare o piccolo (uno solo dei 2 non sarebbe bastato)}} + o((x^2 + y^2)^2)$

$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{😞}$

Se passiamo in polari viene

$\rho^4 \underbrace{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)}_{\geq m > 0 \text{ (solita storia)}} + \rho^4 w(\rho)$

$\geq \rho^4 (m + w(\rho)) \geq \frac{m}{2} \rho^4$ in una pallina
 $\downarrow$ tende a 0 quando $\rho \rightarrow 0$,
 quindi diventa $\geq -\frac{m}{2}$ in
 una opportuna palla centrata in $(0, 0)$

Oss. Avevi dovuto scrivere $w(x, y) = w(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, ma rimaneva comunque vero che $\tilde{e} \geq -\frac{m}{2}$ in una opportuna palla.

N.B. Non funziona nulla se ho x^4 solo invece di $x^4 + y^4$

Esempio 4 $f(x,y) = x \sin y - y \sin x$ Studiare $(0,0)$

Taylor: $f(x,y) = x(y - \frac{1}{6}y^3) - y(x - \frac{1}{6}x^3) + o((x^2+y^2)^{3/2})$

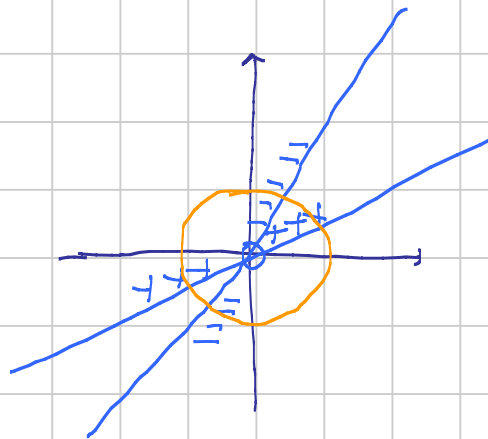
$$= \cancel{x}y - \frac{1}{6}xy^3 - \cancel{y}x + \frac{1}{6}yx^3 + o(p^5)$$

$$= \frac{1}{6}xy \underbrace{(x^2 - y^2)}_{\text{segno variabile}} + o(p^5)$$

$$f(2t,t) = \frac{1}{6} \cdot 2t^2 (4t^2 - t^2) = t^4 + o(t^5)$$

$$f(t,2t) = \frac{1}{6} \cdot 2t^2 (t^2 - 4t^2) = -t^4 + o(t^5)$$

$\Rightarrow (0,0)$ è un p.to di sella (disegnare al computer)



NOTA: ad essere precisi, molto meno rischioso sostituire nella funzione iniziale

$$f(t,2t) = t \sin(2t) - 2t \sin t \text{ e poi sviluppare}$$

$$f(2t,t) = \dots$$

Esempio 5 $f(x,y) = x e^{-(x^2+y^2)}$ Trovare i p.ti stat. e clas.

$$\begin{cases} f_x = 0 & \begin{cases} e^{-(x^2+y^2)} + x e^{-(x^2+y^2)} (-2x) = 0 \\ x e^{-(x^2+y^2)} (-2y) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

2ª eq. $\rightarrow x=0 \rightarrow 1ª \text{ eq. incompatibile} \therefore$

$\rightarrow y=0 \rightarrow 1ª \text{ eq.}$

$$e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = 0$$

$$2x^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi ci son 2 p.ti stazionari: $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

Che tipo di p.ti stazionari sono?

1° modo Calcolo $Hf(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e spero di non avere autov. nulli [calcolo per esercizio]

2° modo Mi faccio furbo :). Osservo che

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = 0 \quad (\text{c'è } e^{-t^2} \text{ che uccide il resto})$$

Osservo che $f(x,y)$ assume sia valori > 0 , sia valori < 0 .

Quindi per W. generalizzato f ammette max e min, che saranno assunti in p.ti staz.

Quindi $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ sono i p.ti di max/min (pure globale)

$(+\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \rightsquigarrow$ p.to di max

$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \rightsquigarrow$ p.to di min

Esempio 6 $f(x,y) = e^{xy} + x^2$

$$f_x(x,y) = y e^{xy} + 2x = 0$$

$$f_y(x,y) = x e^{xy} = 0$$

$$\rightsquigarrow x=0 \rightarrow y=0$$

L'unico p.to staz. è $(0,0)$. Per classificarlo posso calcolare $Hf(0,0)$

$$f(x,y) = 1 + xy + x^2 + o(x^2+y^2) \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} < 0 \Rightarrow$ autov. $+$ $- \Rightarrow$ p.to di sella.

Ulteriore esercizio : calcolare $\text{sup}/\text{inf}/\text{max}/\text{min}$

$$\text{sup} = +\infty \quad f(t,0) = 1+t^2 \rightarrow +\infty \text{ per } t \rightarrow \pm\infty$$

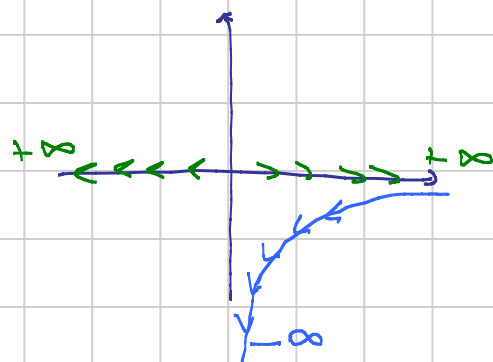
$\text{cuf} > 0$ e NON è min. Servono solite 3 verifiche

- $f(x,y) \geq 0$ sempre (quasi ovvio)
- $f(x,y) = 0$ mai (quasi ovvio per via dell'esponenziale)
- posso avvicinarmi a 0 quanto voglio.

Brutal mode: deve essere $x \sim 0$ e $xy \sim -\infty$

$$f\left(\frac{1}{t}, -t^2\right) = e^{-t} + \frac{1}{t^2} \quad \text{e mandando } t \rightarrow +\infty$$
$$y = -\frac{1}{x^2}$$

[Esercizio: indagare con il computer]



Esempio 7 $f(x,y) = e^{xy} - x^2 - y^2$

Cerco i p.ti stazionari

$$\begin{aligned} f_x &= y e^{xy} - 2x = 0 & \cdot x \\ f_y &= x e^{xy} - 2y = 0 & \cdot y \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} xy e^{xy} &= 2x^2 \\ xy e^{xy} &= 2y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x$$

• Se $y = x$, allora $x e^{x^2} - 2x = 0 \leadsto x(e^{x^2} - 2) = 0$

Quindi $x = y = 0$, oppure $x = y = \pm \sqrt{\log 2}$

• Se $y = -x$, allora $-x(e^{x^2} + 2) = 0 \Rightarrow x = -y = 0$

Quindi $f(x,y)$ ha 3 p.ti stat.: $(0,0)$, $(\sqrt{\log 2}, \sqrt{\log 2})$, $(-\sqrt{\log 2}, -\sqrt{\log 2})$

Andiamo a classificare i p.ti

• $(0,0)$: Taylor dice $f(x,y) = 1 + \boxed{xy - x^2 - y^2} + o(x^2 + y^2)$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Det} > 0 \quad \text{Tr} < 0 \Rightarrow \text{autov. } --$$

$\Rightarrow (0,0)$ è p.to di max locale

• Gli altri 2 :

$$\begin{aligned} f_{xx} &= y^2 e^{xy} - 2 & f_{xy} &= e^{xy} + xy e^{xy} \\ f_{yx} &= \dots & f_{yy} &= x^2 e^{xy} - 2 \end{aligned}$$

$$Hf(\pm \sqrt{\log 2}, \pm \sqrt{\log 2}) = \begin{pmatrix} \log 2 \cdot 2 - 2 & 2 + 2 \log 2 \\ 2 + 2 \log 2 & \log 2 \cdot 2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 4(\log 2 - 1)^2 - 4(\log 2 + 1)^2 < 0 \Rightarrow \text{autovalori } + -$$

$\Rightarrow$ entrambi p.ti di sella.

Inf / sup / max / min

• $\text{sup} = +\infty$ ($f(t,t) = e^{t^2} - 2t^2 \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow \pm \infty$)

• $\text{inf} = -\infty$ ($f(t,0) = 1 - t^2 \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow \pm \infty$)

[Grafico al computer per vedere che accade]

— o — o —