

Studio locale di funzioni di più variabili (Lezioni 17 e 19 di AM2-14)

Se $\nabla f(x_0) = 0$, allora

$Hf(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ p.to min. locale

x_0 p.to di min. locale $\Rightarrow Hf(x_0) \geq 0$

$Hf(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ p.to max. locale

x_0 p.to max. locale $\Rightarrow Hf(x_0) \leq 0$

$Hf(x_0)$ N.D.P. $\Rightarrow x_0$ p.to di sella

$\uparrow$ matrice Hessiana (simmetrica)

Il punto che studiamo in questa lezione è sempre $(0,0)$

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y^2$ L'origine è p.to min. locale

1° modo : $f(0,0) = 0 \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
 $\uparrow$ zetta se $(x,y) \neq (0,0)$

2° modo $Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \leadsto$ le derivate seconde si ricavano da Taylor come visto alla les. prec.

$$f(x,y) = \frac{1}{2} (2x^2 + 4y^2)$$

$$\uparrow$$

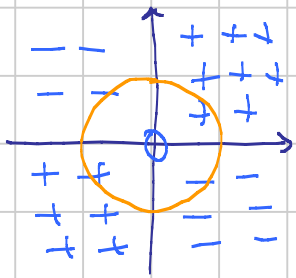
$$\frac{1}{2!} (f_{xx} x^2 + 2f_{xy} xy + f_{yy} y^2)$$

non c'è nulla di 1° grado $\Rightarrow (0,0)$ è stazionario

$$f_x x + f_y y$$

Esempio 2 $f(x, y) = xy$ $(0, 0)$ è p.to di sella!

1° modo



In $(0, 0)$ vale 0. In ogni intorno di $(0, 0)$ ci sono p.ti in cui $f > 0$ e p.ti in cui $f < 0$. Quindi $(0, 0)$ non può essere p.to di max/min.

2° modo

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

segnaatura $+$ $-$ $\leftarrow$
 $Tr = 0$ $Det = -1$ $\leftarrow$ autovalori

Esempio 3 $f(x, y) = x^4 + y^4 \Rightarrow (0, 0)$ p.to di min. loc. (shetto)

1° modo : $f(0, 0) = 0 \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
 $\uparrow$ shetto $\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

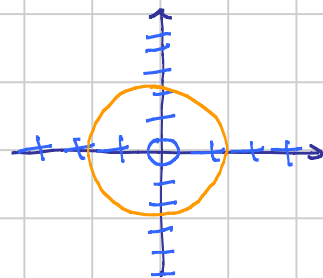
2° modo $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ in Taylor non c'è nulla di grado 2

Dall' Hf NON si può dedurre nulla

Esempio 4 $f(x, y) = x^2 - y^4 \Rightarrow (0, 0)$ p.to di sella

1° modo : studio del segno

In ogni pallina ho sia $+$ sia $-$



2° modo : $Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Autovalori : $+$ 0

$\Rightarrow$ semidefinita positiva

$\Rightarrow$ posso escludere che $(0, 0)$

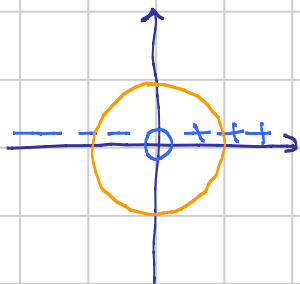
sia p.to di max, ma restano

aperte 2 possibilità 😞

Esempio 5 $f(x,y) = x^3 - y^3$

$(0,0)$ è p.ti di sella

1° modo:



In questo caso basta guardare l'asse x.

2° modo $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ambiguità totale !! 😞

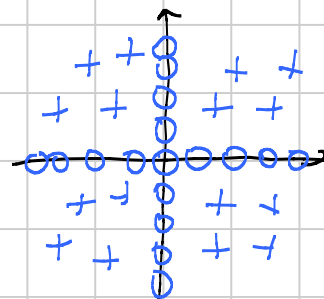
Esempio 6 $x^2 y^2$

$(0,0)$ p.to min. locale, ma non stretto!

$$H_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{😞}$$

$$f(0,0) = 0 \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

↑
vale uguale se e solo se siamo sugli assi



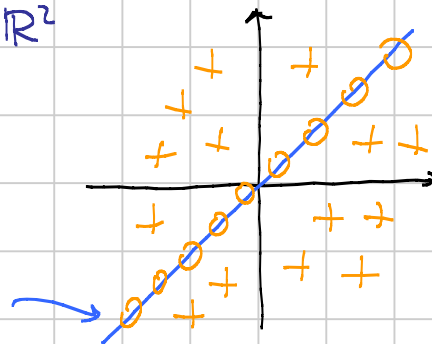
Oss. In questo caso tutti i p.ti sugli assi sono p.ti di min. locale (e anche globale)

Esempio 7 $f(x,y) = (x-y)^2 \Rightarrow (0,0)$ p.to di min. non stretto

1° modo $f(0,0) = 0 \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

↑
vale = se e solo se $y = x$

tutti p.ti di min.



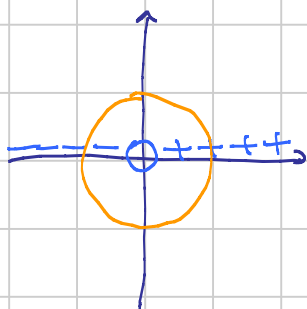
2° modo $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Tr} = 4 \\ \text{Det} = 0 \end{matrix}$$

Autovalori: $+0$
 $\Rightarrow$ semidefinita positiva $\Rightarrow$ 😞

Esempio 8 $f(x,y) = (x-y)^5 \Rightarrow (0,0)$ è p.to di "sella"

$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{☹️}$$



Disegnare il grafico con il computer e vedere di cosa si tratta

Esempio 9 $f(x,y) = e^{xy} \Rightarrow (0,0)$ è p.to di sella

Taylor: $f(x,y) = 1 + xy + o(x^2+y^2)$

- Niente di primo grado $\Rightarrow (0,0)$ è stazionario
- xy sul 2° grado

$$\Rightarrow Hf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{autovalori } + - \\ \Rightarrow \text{sella}$$

Oss. Se il p.to è stazionario e Hf non ha autovalori nulli, allora il comportamento locale è lo stesso dei termini di 2° grado del pol. di Taylor.

Esempio 10 $f(x,y) = x^4 + y^6 + \boxed{xy} \Rightarrow (0,0)$ è p.to di sella
↑ questo conta!

Taylor: $f(x,y) = xy + o(x^2+y^2) \Rightarrow$ come prima

Esempio 11 $f(x,y) = -x^4 - y^4 + y^2 \Rightarrow (0,0)$ p.to di sella
(fare disegno!)

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Autovalori } + 0 \Rightarrow \text{☹️}$$

Ancora! $f(x,y) = x(y + o(y)) = xy + o(x^2 + y^2)$

Taylor: $f(x, y) = x - y + o(\sqrt{x^2 + y^2})$

$$f_x(0,0) = 1$$
$$f_y(0,0) = -1$$

Esempio 14 $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y \Rightarrow (0, 0)$ p.to di max
stretto

2° modo : $f(0,0) = 1 \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
 $\uparrow$
 in $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ vale uguale
 se e solo se $(x,y) = 0$

Oss. Questa funzione ha tanti p.ti di max locale (e pure globale) e sono tutti i p.ti in cui entrambi i cos fanno 1, cioè i p.ti del tipo

$(2a\pi, 2b\pi)$ con a e b interi

(esplorare il grafico)

Esempio 15 $f(x,y) = e^{xy} - xy$

$$f(x,y) = 1 + \cancel{xy} + o(x^2+y^2) - \cancel{xy}$$

- "uiente" di 1° grado $\Rightarrow (0,0)$ è stazionario
- "uiente" di 2° grado $\Rightarrow Hf = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{☹}$

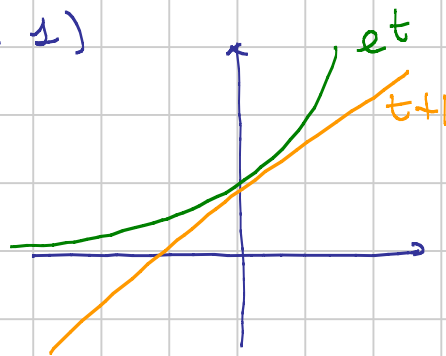
Bisogna sperare in disuguaglianze. Dico che

$$f(x,y) \geq 1 = f(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Se è vero, $(0,0)$ è p.to di min. La disug. diventa

$e^{xy} - xy \geq 1$, cioè $e^{xy} \geq xy + 1$, cioè $e^t \geq t + 1$, e questa è vera per ogni $t \in \mathbb{R}$ (Analisi 1)

e^t è convessa, dunque sta sopra le sue rette tangenti.



— o — o —

Piccola aggiunta allo schema iniziale

- Se $Hf(x_0)$ ha almeno un autovalore $+$, allora $Hf(x_0)$ NON può essere ≤ 0 , quindi x_0 NON può essere p.to di max (se lo fosse, allora $Hf(x_0) \leq 0$) ↑ può essere solo sella o min
- Se $Hf(x_0)$ ha almeno un autovalore $-$, allora... x_0 NON può essere p.to di min. (ripetere ragionamento) ↑ può essere solo sella o max

— o — o —