

Sviluppi di Taylor in più variabili (vedi lezione 18 di AM2-14)

Esempio 1 $f(x,y) = \sin(xy)$

Taylor di ordine 8
centrato in $(0,0)$

SLOGAN: USARE GLI SVILUPPI DI ANALISI 1 (vedi les. AM1)

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \quad \text{ma anche} \quad \sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4) \\ \text{per } t \rightarrow 0$$

come numeri

come vettore

Ora osserviamo che $xy \xrightarrow{\uparrow} 0$ per $(x,y) \xrightarrow{\uparrow} (0,0)$.

Ponendo $t = xy$ troviamo

$$\sin(xy) = xy - \frac{1}{6}x^3y^3 + o(x^4y^4)$$

↑ grado 8

ordine dello
sviluppo

Alla fine in uno sviluppo di Taylor ci vuole $o(\|(x,y)\|^n)$

Quello che sta tendendo a 0 è la distanza
di (x,y) da $(0,0)$.

nel nostro caso

$$(\sqrt{x^2+y^2})^8 = \\ = (x^2+y^2)^4$$

$$= \boxed{\rho^8}$$

Osservazione chiave: $o(x^4y^4) = o((x^2+y^2)^4)$

Dando per buona l'oss. chiave abbiamo ottenuto

$$\sin(xy) = xy - \frac{1}{6}x^3y^3 + o((x^2+y^2)^4)$$

↑
questo è ρ^8

Giustificiamo il punto chiave. Cosa vuol dire $o(x^4y^4)$?
Vuol dire

x^4y^4 $\omega(xy)$
↓ tende a 0 quando l'argomento tende a 0

$$x^4y^4 \omega(xy) = (x^2+y^2)^4 \boxed{\frac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^4} \omega(xy)} \quad \text{[Esponente corretto dopo video]}$$

$\omega_1(x,y)$

Dico che $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \omega_1(x,y) = 0$ come limite in 2 variabili.

Questo segue da:

[Esponente corretto dopo video]

$$\boxed{\frac{x^4y^4}{(x^2+y^2)^4}} \quad \boxed{\omega(xy)}$$

↓ ↓
0 quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$

limitata, perché in coordinate polari diventa

~~ρ^8~~ . roba trigonometrica

Questo completa la dimostrazione.

— 0 — 0 —

Fatto generale $o(x^a y^b) = o(\|(x,y)\|^{a+b})$ con la stessa diu
(a e b sono interi ≥ 0)
o anche reali ≥ 0

quindi ad esempio

$$o(x^3 y^7) = o((x^2+y^2)^5)$$

$$o(x^7 y^6) = o((x^2+y^2)^{\frac{13}{2}})$$

— 0 — 0 —

$$\sin(xy) = xy - \frac{1}{6} x^3 y^3 + o((x^2+y^2)^{\frac{9}{2}})$$

(il termine successivo sarebbe di grado 10)

Esempio 2 $f(x, y) = \cos(x^2) \cdot e^{xy^2}$ grado 8

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^5)$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{24} x^8 + o(x^{\leftarrow})$$

volevamo

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$e^{xy^2} = 1 + xy^2 + \frac{1}{2} x^2 y^4 + o((x^2 + y^2)^4)$$

↑ il termine successivo sarebbe di grado 9

È come se fossi partito da

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + o(x^{\frac{8}{3}})$$

$$e^{xy^2} = 1 + xy^2 + \frac{1}{2} x^2 y^4 + o(x^{\frac{8}{3}} y^{\frac{16}{3}})$$

↑ la somma degli esponenti è 8.

Mettendo insieme

$$\begin{aligned} \cos(x^2) \cdot e^{xy^2} &= \left(1 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{24} x^8\right) \left(1 + xy^2 + \frac{1}{2} x^2 y^4\right) + o(p^8) \\ &= 1 + xy^2 + \frac{1}{2} x^2 y^4 - \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{2} x^5 y^2 + \frac{1}{24} x^8 \\ &\quad + o((x^2 + y^2)^4) \end{aligned}$$

Esempio 3 Calcolare, data la funzione f precedente, $f_{xx}(0,0)$, $f_{xyy}(0,0)$, $f_{xxy}(0,0)$

1° modo Fare tutti i conti (e con i prodotti è piacevole!)

2° modo Ricordare la formula per i polinomi di Taylor.

Dalla teoria sappiamo che

$$f(x,y) = f(0,0)$$

grado 0

$$+ f_x(0,0)x + f_y(0,0)y$$

grado 1

specie di quadrato del binomio

$$+ \frac{1}{2!} (f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2)$$

grado 2

Fattoriale

$$+ \frac{1}{3!} (f_{xxx}x^3 + 3f_{xxy}x^2y + 3f_{xyy}xy^2 + f_{yyy}y^3)$$

cubo del binomio (tutte le derivate sono calcolate in (0,0))

Conseguenza importante:

- il coeff. di x^2 nel polinomio è $\frac{1}{2} f_{xx}(0,0)$. Nel nostro caso x^2 "non c'è", cioè ha coeff. 0, dunque $f_{xx}(0,0) = 0$.
- il coeff. di xy^2 nel polinomio è $\frac{3}{3!} f_{xyy}(0,0) = \frac{1}{2} f_{xyy}(0,0)$

Nel nostro caso il coeff. è 1, dunque $f_{xyy}(0,0) = 2$.

- Analogamente a sopra $f_{xxy}(0,0) = 0$ perché x^2y "non c'è".

Chi sarebbe il coeff. di x^5y^2 ?

$$\dots \frac{1}{7!} \left(\frac{\partial^7 f}{\partial x^7} (0,0) x^7 + 7 \frac{\partial^7 f}{\partial x^6 \partial y} (0,0) x^6 y + \right. \\ \left. + 21 \frac{\partial^7 f}{\partial x^5 \partial y^2} (0,0) x^5 y^2 + \dots \right)$$

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ & & 1 & 7 & 21 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

$$\text{Quindi il coeff. è } \frac{21}{7!} \frac{\partial^7 f}{\partial x^5 \partial y^2} (0,0) = -\frac{1}{2}$$

da cui ricavo la derivata.

— 0 — 0 —

Achtung! Dallo sviluppo in (0,0) posso dedurre SOLO i valori delle derivate in (0,0) !!! e non in altri punti.

Esempio 4

$$f(x,y) = \sin(x^2+y^5)$$

ordine 8

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)$$

osserviamo che $x^2+y^5 \rightarrow 0$
quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$

$$\begin{aligned}\sin(x^2+y^5) &= x^2+y^5 - \frac{1}{6}(x^2+y^5)^3 + o(\underbrace{(x^2+y^5)^4}_{\text{tutte potenze con esponente} \geq 8}) \\ &= x^2+y^5 - \frac{1}{6}x^6 + o((x^2+y^2)^8)\end{aligned}$$

unico termine del cubo
che sopravvive: gli altri
hanno grado ≥ 8 e
quindi finiscono in o piccolo

Quanto fa $f_{xy}(0,0)$? viene 0, perché xy "non c'è"

Idem per tutte le derivate parziali di ordine 4 o 7 o 8.

Esempio 5

$$\arctan(x+y^2) \sin(x^2y)$$

ordine 8

$$\sin(x^2y) = x^2y + o((x^2+y^2)^4) \quad (\text{il termine succ. avrebbe grado 9})$$

$$\arctan(x+y^2) = (x+y^2) - \frac{1}{3}(x+y^2)^3 + \frac{1}{5}(x+y^2)^5 + o((x^2+y^2)^{5/2})$$

$$= x+y^2 - \frac{1}{3}(x^3+3x^2y^2+3xy^4) + \frac{1}{5}x^5 + o(p^5)$$

Non resta che moltiplicare tutto per x^2y (tutti i termini
senza y).

— 0 — 0 —