

Max / min su insiemi non limitati

[Prerequisiti: fino alla lezione 16 di AM2-14]

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y^4$ $A = \mathbb{R}^2$

→ $f(x,y) \geq 0$ sempre con $=$ se e solo se $(x,y) = (0,0)$
quindi

$$\min = 0 \quad \text{pto di min.} = (0,0)$$

→ $\sup = +\infty$, quindi max non esiste (basta considerare
 $f(t,0) = t^2$ con $t \rightarrow +\infty$)

Esempio 2 $f(x,y) = x^2 - y^4$ $A = \mathbb{R}^2$

$$\rightarrow \sup = +\infty \quad f(t,0) \text{ con } t \rightarrow +\infty \quad (o t \rightarrow -\infty)$$

$$\rightarrow \inf = -\infty \quad f(0,t) \text{ con } t \rightarrow +\infty$$

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$ $A = \mathbb{R}^2$
 $(x+y)^2$

→ $\min = 0$ e i pti di min. sono tutti i pti della retta $y = -x$

$$\rightarrow \sup = +\infty \quad f(t,0) \text{ con } t \rightarrow \pm\infty$$

Esempio 4 $f(x,y) = x^4 + y^2 + x^2y$

Proviamo a pareggiare gli esponenti: $x = u$ e $y = v^2$

$$u^4 + v^4 + u^2v^2 \geq 0$$

↑
forma quadratiche
nelle variabili u^2 e v^2

In alternativa: $u^4 + v^4 + u^2 v^2 = (u^4 + u^2 v^2 + \frac{1}{4} v^4) + \frac{3}{4} v^4$
 $= (u^2 + \frac{1}{2} v^2)^2 + \frac{3}{4} v^4$

Forse lo potevo vedere dall'inizio:

$$x^4 + y^2 + x^2 y = (x^2 + \frac{1}{2} y)^2 + \frac{3}{4} y^2 \geq 0 \text{ e vale il segno di } = \text{ se e solo se } x=y=0$$

→ min = 0 e pto di min unico: (0,0)

→ sup = +∞ (f(t,0) con t → +∞)

Esempio 5 $f(x,y) = x^4 + y^2 + x y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

→ sup = +∞ [f(t,0) con t → +∞]

Paragliamo gli esponenti: $x = u$ e $y = v^2$: $\underbrace{u^4 + v^4}_{\text{grado } 4} + \underbrace{u v^4}_{\text{grado } 5}$

Quindi considero $u = t$ e $v = t$, cioè $x = t$ e $y = t^2$.

$$f(t, t^2) = t^4 + t^4 + t^5 = 2t^4 + t^5 \text{ e per } t \rightarrow -\infty \text{ questo tende a } -\infty$$

→ inf = -∞ [f(t, t^2) con t → -∞]

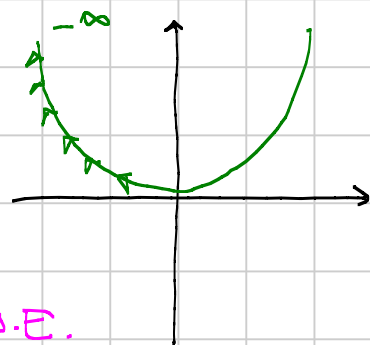
Oss. Lo stesso procedimento mostra che $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x^4 + y^2 + x y^2) \text{ N.E.}$

Si voleva facendo il limite sulle rette?

$$f(t, mt) = t^4 + m^2 t^2 + m^2 t^3$$

e questo tende sempre a +∞ quando $t \rightarrow \pm\infty$

Il limite su tutte le rette fa +∞, ma globalm. N.E.



Esempio 6 $f(x,y) = \underbrace{x^4 + y^4}_{\rho^4} + \underbrace{81xy}_{\rho^2}$ $A = \mathbb{R}^2$

→ $\sup = +\infty$ [$f(t,0)$ con $t \rightarrow +\infty$: provare altre strade !!!]

→ speriamo che esista $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} f(x,y) = +\infty$.

Se accade questo, allora per Weierstrass generalizzato (IMPORTANTISSIMO) il min. esiste per forza.

Il limite si fa in coord. polari con le solite storie...

Visto che il min. esiste, sarà per forza in un p.to stazionario (sing. non ce ne sono e bordo nemmeno). Troviamoli!

$$\begin{cases} 4x^3 + 81y = 0 \\ 4y^3 + 81x = 0 \end{cases} \quad y = -\frac{4}{81}x^3 = -\frac{2^2}{3^4}x^3$$

$$4\left(-\frac{2^6}{3^{12}}x^9\right) + 81x = 0 \quad x\left[3^4 - \frac{2^8}{3^{12}}x^8\right] = 0$$

$$x=0 \leadsto y=0$$

$$x^8 = \frac{3^{16}}{2^8} \leadsto x = \pm \frac{9}{2} \leadsto y = \mp \frac{4}{81} \frac{9 \cdot 81}{8} = \mp \frac{9}{2}$$

Dal sistema abbiamo ottenuto 3 p.ti stazionari

$$f(0,0) = 0$$

$$f\left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right) = f\left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = \underbrace{\left(\frac{9}{2}\right)^4 \cdot 2 - 81\left(\frac{9}{2}\right)^2}_{\text{Questo è il minimo}} < 0$$

↑
due p.ti di minimo

Esempio 7 $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2+1}$ $A = \mathbb{R}^2$

Che aria tira? $\sim \frac{e^2}{e^2+1}$, quindi c'è possibilità di limite finito all'infinito.

→ $\min = 0$, p.ti di $\min =$ tutto l'asse y

$f(x,y) \geq 0$ sempre con = se e solo se $x=0$ (asse y)

Domanda: esiste $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y)$? NO ☹️

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{t^2+1} = 1$$

ci dice che $\sup/\max$ saranno ≥ 1

→ $\sup = 1$ e $\max$ non esiste. Bisogna fare 3 cose:

- $f(x,y) \leq 1$ sempre $\frac{x^2}{x^2+y^2+1} \leq 1$ (tutto ≥ 0 con $\text{denom} \geq \text{numeratore}$)
(finora $\sup \leq 1$)

- $f(x,y)$ non è mai uguale a 1: $\frac{x^2}{x^2+y^2+1} = 1 \leadsto$ moltiplico e viene annullato

- $f(x,y)$ si può avvicinare quanto vuole a 1

(Basta prendere $f(t,0)$ con $t \rightarrow +\infty$)

Ora $\sup = 1$ e $\max$ non esiste.

Tecnica generale: per dimostrare che $\sup = 34$ bisogna

- far vedere che $f(x,y) \leq 34$ sempre
- mostrare che $f(x,y)$ si avvicina quanto vuole a 34 (con $\frac{1}{\epsilon}$)

Esempio 8 $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2+1}$

$\sim \frac{p}{p^2}$ all'infinito,
quindi forse $\lim = 0$.

- Con le coord. polari si dimostra (farlo!) che

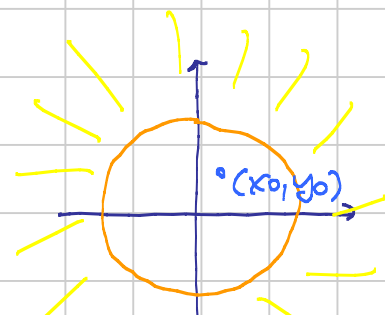
$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = 0$$

- Si osserva che esiste (x_0, y_0) t.c. $f(x_0, y_0) > 0$ (ad esempio $(x_0, y_0) = (1, 1)$)

Da queste 2 osservazioni (per W. generalizzato) segue che $f(x,y)$ ammette max in $\mathbb{R}^2$

[Per def. di limite, esiste $r > 0$ t.c.

$$f(x,y) \leq \frac{1}{2} f(x_0, y_0) \quad \text{se } x^2+y^2 \geq r^2$$



qui $f \leq \frac{1}{2} f(x_0, y_0)$

Per W normale, $f(x,y)$ ammette max in $x^2+y^2 \leq r^2$.

Dico che questo max è max su tutto $\mathbb{R}^2$. Infatti

- batte i pti nella palla perché è il max lì
- batte i pti fuori perché è $\geq f(x_0, y_0)$ e questo è maggiore stretto dei valori fuori dalla palla]

Una volta che sappiamo che max esiste, non resta che calcolare i pti stazionari

$$\frac{x^2+y^2+1 - 2x^2}{()^2} = 0$$

$\downarrow$
 $x = \pm 1$

$$- \frac{2y}{()^2} = 0$$

$\downarrow$
 $y = 0$

pti di max

$\leadsto (1, 0)$ e $(-1, 0)$

$\uparrow$
pti di min.

[min esiste per lo stesso motivo, oppure osservando che $f(x,y)$ è DISPARI nella variabile x]

Esempio 8 $f(x, y) = x^2 + \arctan(xy)$ $A = \mathbb{R}^2$

$\rightarrow \sup = +\infty$ $[f(t, 0) \text{ con } t \rightarrow \pm\infty]$

$\rightarrow \inf = -\frac{\pi}{2}$ e non è min. Servono 3 verifiche, analoghe a esempio prec.

① $f(x, y) \geq -\frac{\pi}{2}$ sempre $[x^2 \geq 0, \arctan(\text{qualcosa}) \geq -\frac{\pi}{2}]$

Questo dice che $\inf \geq -\frac{\pi}{2}$

② $f(x, y) = -\frac{\pi}{2}$ mai $[dovrebbe essere x=0 \text{ e } \arctan = -\frac{\pi}{2}]$

Questo dice che $\boxed{\text{SE}} \inf = -\frac{\pi}{2}$, allora non è min.

③ $f(x, y)$ può avvicinarsi a piacere a $-\frac{\pi}{2}$!!

Se $x \sim 0$ e $xy \sim -\infty$

$$f\left(\frac{1}{t}, t^2\right) = \frac{1}{t^2} + \arctan t$$

Ora basta mandare $t \rightarrow -\infty$!!!

$[\text{è come dire } y = \frac{1}{x^2} \text{ con } x \rightarrow 0^-]$

$[\text{Provare a vedere grafici con computer !!!}]$

