

Limiti all'infinito per funzioni di 2 variabili (Lez 12 e 13 di AM2-14)
 0 più

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty \quad (\Leftrightarrow) \quad \forall M \in \mathbb{R} \exists r > 0 \text{ t.c.} \\ f(x,y) \geq M \quad \forall (x,y) \text{ t.c. } x^2+y^2 \geq r^2$$

Achtung! In 2 o più variabili non c'è $+\infty$ e $-\infty$

Esempio 1 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x+y)$ non esiste !!

Basta trovare 2 modi di andare all'infinito in cui la funzione si comporta in modo diverso!

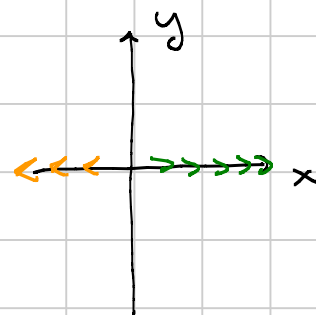
$$f(t,0) = t$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = +\infty$$

(semiare x positivo)

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t,0) = -\infty$$

(semiare x negativo)



C'erano tantissimi altri modi di ottenere risultati diversi

Esempio 2 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x+y) \arctan(x-y)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \arctan t = +\infty$$

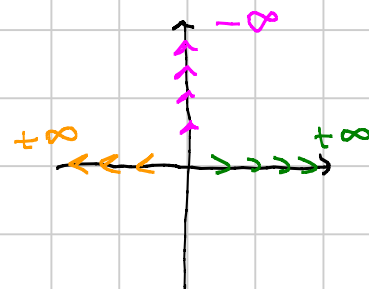
semiare x positivo

↑ funzione pari

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t,x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t \arctan t = +\infty$$

semiare x negativo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \arctan(-t) = -\infty$$



il limite non esiste

Esempio 3 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^4 + y^4 + xy = +\infty$

Coordinate polari! $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ In questo modo

$$\boxed{\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \text{ diventa } \lim_{\rho \rightarrow +\infty}}$$

$$\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + \rho^2 \cos \theta \sin \theta \geq \uparrow \text{ voglio a dx qualcosa che non dipenda da } \theta \text{ e che tenda a } +\infty \text{ per } \rho \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{oss 1 : } \cos \theta \sin \theta &\geq -1 \\ \text{oss 2 : } \cos^4 \theta + \sin^4 \theta &\geq m > 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{oss 1 : } \cos \theta \sin \theta &\geq -1 \\ \text{oss 2 : } \cos^4 \theta + \sin^4 \theta &\geq m > 0 \end{aligned}} \right\} \text{ per ogni } \theta \in [0, 2\pi]$$

↓ solita storia: la funzione è continua in $[0, 2\pi]$, quindi per W. ha un min in un p.to θ_0 e quindi $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta \geq \cos^4 \theta_0 + \sin^4 \theta_0 = m > 0$ perché $\cos \theta_0$ e $\sin \theta_0$ non possono essere nulli entrambi

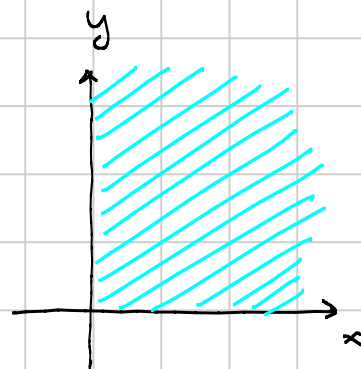
Ora è fatta

$$\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + \rho^2 \cos \theta \sin \theta \geq m \rho^4 - \rho^2 \xrightarrow[\text{per } \rho \rightarrow +\infty]{+} +\infty$$

Esempio 4 (limite con dominio ristretto)

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ x \geq 0, y \geq 0}} (x+y)$$

Ora posso muovermi solo sul 1° quadrante



Dico che fa $+\infty$ e si fa in coord. polari

$$x+y = \rho (\underbrace{\cos \theta + \sin \theta}_{\geq m > 0}) \geq \uparrow m \rho \text{ e questo tende a } +\infty$$

(se mi limito al 1° quadrante $\rightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ per il solito discorso)

Esempio 5 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} (x^2+y^2+xy) = +\infty$

Coord. polari: $\rho^2 + \rho^2 \cos \theta \sin \theta = \rho^2 (1 + \cos \theta \sin \theta)$

Analisi 1: studiando la funzione di θ si ottiene che $\cos \theta \sin \theta \geq -\frac{1}{2}$ da cui

$f(x,y) \geq \rho^2 \frac{1}{2}$ e quindi tende a $+\infty$.

Metodo alternativo: farsi venire un'idea 😊

$x^2+y^2+xy \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ equivale a $\frac{1}{2}(x^2+y^2+2xy) \geq 0$
 $(x+y)^2$

Così si ottiene ugualmente $f(x,y) \geq \frac{1}{2}\rho^2$

Esempio 6 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^2+y^2+\alpha xy$ al variare di $\alpha \geq 0$

Come prima troviamo $\rho^2 (1 + \alpha \cos \theta \sin \theta) = \rho^2 (1 - \frac{\alpha}{2})$

• Se $1 - \frac{\alpha}{2} > 0$, cioè se $\alpha < 2$, allora $\lim = +\infty$

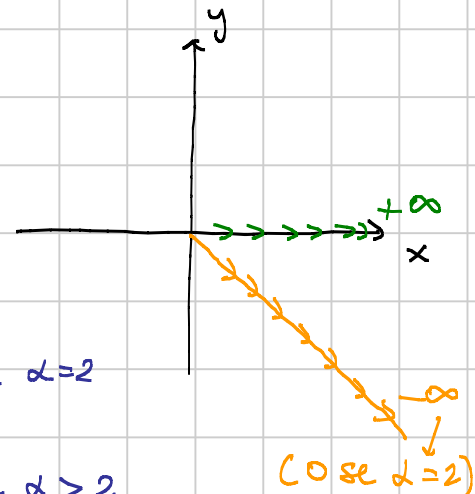
• Se $1 - \frac{\alpha}{2} \leq 0$, cioè se $\alpha \geq 2$, allora il limite non esiste. Per dimostrarlo servono due casi

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$ ☹️

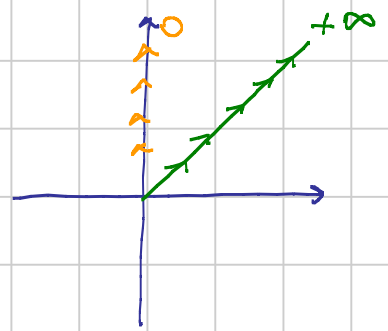
$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,-t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2+t^2-\alpha t^2$

$= \lim_{t \rightarrow +\infty} (2-\alpha)t^2 = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha=2 \\ -\infty & \text{se } \alpha>2 \end{cases}$

(in ogni caso è diverso da $+\infty$)



Esempio 7 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} xy$ N.E.
 $x \geq 0$
 $y \geq 0$



$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty \quad \text{stick figure}$$

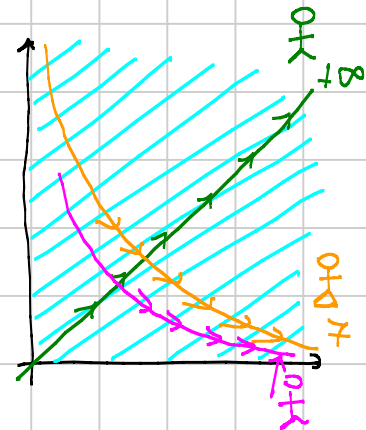
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 0 = 0 \quad \text{stick figure}$$

Esempio 8 Esattamente come sopra, ma con vincolo $x > 0$ e $y > 0$
 (Questo vieta di scegliere $(t, 0)$ o $(0, t)$)

Da non pensare nemmeno:

$$xy = \underbrace{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}_{\text{ora } \theta \in (0, \frac{\pi}{2})} \geq u \rho^2 \rightarrow +\infty \quad \text{per } \rho \rightarrow +\infty$$

estremi esclusi,
quindi $u > 0$



Infatti $\sup \{ \cos \theta \sin \theta : \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \} = 0$ quindi la disug. di sopra è falsa.

Come prima $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$ stick figure

Ora $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, \underbrace{\frac{t}{t}}_{y = \frac{1}{x}}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t = t$ stick figure

Quindi il limite non esiste

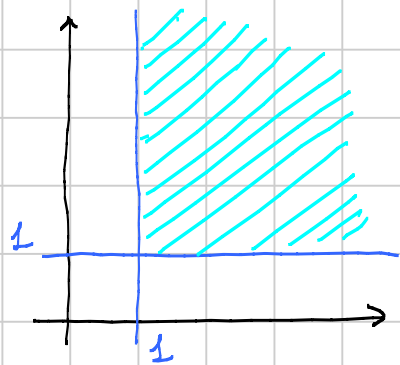
Si può andare a 0? Why not!

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, \frac{1}{t^2}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0 \quad \text{stick figure}$$

— 0 —

Esempio 9 Come sopra, con condizioni $x \geq 1$ e $y \geq 1$

Osserviamo che nell'insieme esistono p.ti con θ arbitrariamente vicino a 0 e a $\frac{\pi}{2}$, quindi è ancora che in coord. polari è difficile fare stime.



1° modo Ci inventiamo una disuguaglianza

$$xy \geq x \quad \text{nella zona} \quad \text{e analogamente} \quad xy \geq y$$

$\uparrow$ $y \geq 1$ $\uparrow$ $x \geq 1$

Sommando otteniamo $2xy \geq x+y$, e quindi

$$xy \geq \frac{1}{2}(x+y)$$

↓ tendeva a $+\infty$ su tutto il 1° quadrante, quindi a maggior ragione sull'insieme ristretto. Conclusione con i carabinieri

Quindi: il limite esiste e fa $+\infty$.

2° modo Cambio di variabili per portare l'origine in (1,1):

$$x = u+1 \quad y = v+1. \quad \text{Il limite diventa}$$

$$\lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} (u+1)(v+1) = \lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} (\underbrace{uv}_{\geq 0} + u + v + 1) \quad \text{con il vincolo } u \geq 0 \text{ e } v \geq 0$$

$$\geq \lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} (u+v) = +\infty$$

perché è un ex.prec.

Oss. L'idea è stata riportarsi al vero 1° quadrante.

— 0 — 0 —