

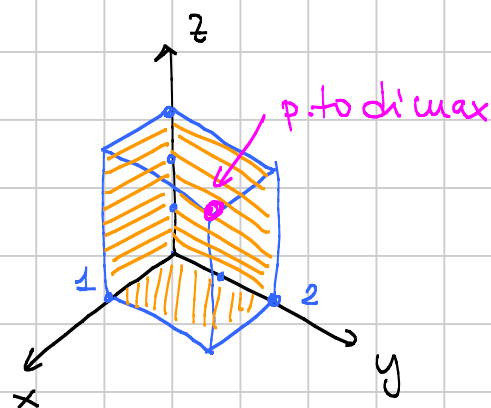
Max / min di funzioni su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$

Esempio 1 $f(x,y,z) = xyz$
 $A = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$

$xyz \geq 0$ in A e vale = se e solo se almeno una delle tre coordinate si annulla

(quindi abbiamo 3 facce interne di punti di min)

$xyz \leq 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ e vale =
 se e solo se $(x,y,z) = (1,2,3)$



Esempio 2 $f(x,y,z) = x + yz$
 Insieme: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ← sfera con centro in $(0,0,0)$ e raggio 2

$W \Rightarrow$ max e min esistono

Stat. int. e sing. int. : $\emptyset$ $\nabla f(x,y,z) = (1, z, y)$

Bordo : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (superf. sfera)

$\leadsto$ moltiplicatori con $\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

1° sistema :

$\Phi_x = 0$	$2x = 0$
$\Phi_y = 0$	$2y = 0$
$\Phi_z = 0$	$2z = 0$
$\Phi = 0$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Nessuna soluz.

2° sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ z = 2\lambda y \\ y = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_x &= \lambda \phi_x \\ f_y &= \lambda \phi_y \\ f_z &= \lambda \phi_z \\ \phi &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} zy &= 2\lambda y^2 \\ yz &= 2\lambda z^2 \end{aligned}$$

$$2\lambda y^2 = 2\lambda z^2$$

$$\lambda(y^2 - z^2) = 0$$

$$\lambda = 0$$

incompatibile
con 1° eqn

$$y^2 = z^2$$

$$y = \pm z$$

$$y = z$$

2°

$$y = 2\lambda y$$

$$(2\lambda - 1)y = 0$$

$$y = 0$$

$$y = z$$

$$z = 0$$

3°

$$x = \pm 2$$

$$(\pm 2, 0, 0)$$

$$x = \frac{1}{2}$$

1° eq

$$x = 1$$

3° eq.

$$y = z = \pm\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} (1, \sqrt{3}, \sqrt{3}) \\ (1, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Il ramo con $y = -z$ si tratta
in modo analogo

$$-y = 2\lambda y$$

$$(2\lambda + 1)y = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}$$

$$x = -1$$

$$y = -z = \pm\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} (-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}) \\ (-1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

$$x = \pm 2$$

già visti

[Dopo video: tutte le $\sqrt{3}$ sono in realtà $\sqrt{\frac{3}{2}}$,
il che cambia anche i valori di max/min]

Abbiamo 6 candidati

$$f(2, 0, 0) = 2$$

$$f(-2, 0, 0) = -2$$

$$f(-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}) = f(-1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}) = -1 - 3 = -4 \text{ min}$$

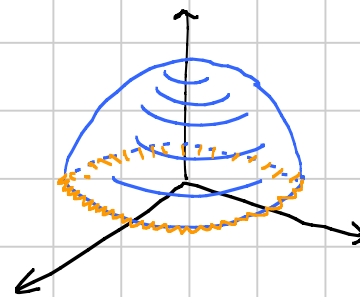
$$f(1, \sqrt{3}, \sqrt{3}) = f(1, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 1 + 3 = 4 \text{ max}$$

Esempio 3

$$f(x, y, z) = x - 2y + z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad z \geq 0$$

semisfera alta
(solo "bordo")



$\nabla f \Rightarrow$ max e min esistono

Staz. int. e sing. int. non hanno senso

Bordo $\leadsto$ moltiplicatori λ $\rightarrow$ scartare candidati con $z < 0$
 $\rightarrow$ considerare "bordo del bordo"
o "p.ti di taglio"

1° sistema: no soluzione

2° sistema:

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases} \quad \text{Oss che } \lambda \neq 0 \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2\lambda} \\ y &= -\frac{1}{\lambda} \\ z &= \frac{1}{2\lambda} \end{aligned}$$

Sostituisco nella 4ª equ: $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 6$; $\frac{3}{2\lambda^2} = 6$

$$\leadsto \frac{1}{\lambda^2} = 4 \quad \leadsto \frac{1}{\lambda} = \pm 2 \quad \leadsto (x, y, z) = \boxed{(1, -2, 1)} \\ (x, y, z) = (-1, 2, -1)$$

$\uparrow$ NO BUONO

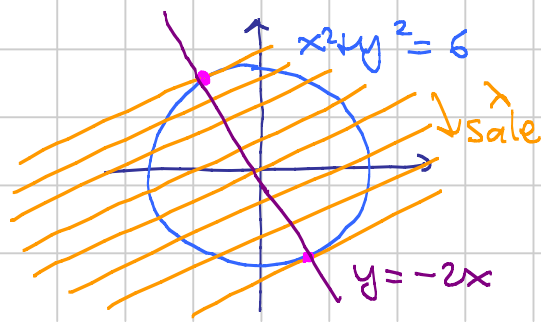
Il secondo candidato deve venire fuori dai p.ti di taglio, cioè i p.ti con

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \quad \text{e} \quad z = 0 \quad x^2 + y^2 = 6$$

su cui devo fare max/min di $x - 2y$ (ho messo $z = 0$)

Ci siamo ridotti ad un pbm. in dim = 2

$$x - 2y = \lambda \quad \leadsto \quad y = \frac{x}{2} - \frac{\lambda}{2}$$



Per trovare i 2 p.ti usiamo a sua volta i moltiplicatori in $\mathbb{R}^2$

2° sistema $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases} \quad \cancel{2}\lambda y = -\cancel{2}(2\lambda x) \quad y = -2x$

$$x^2 + 4x^2 = 6 \quad \leadsto \quad x = \pm \sqrt{\frac{6}{5}}$$
$$y = \mp 2\sqrt{\frac{6}{5}}$$

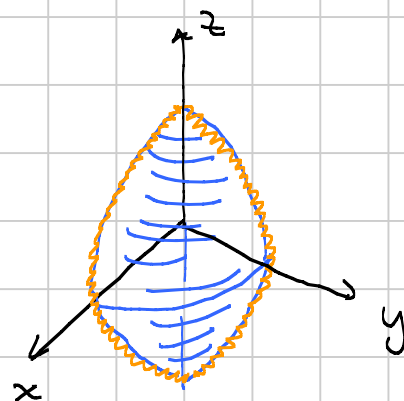
Alla fine abbiamo 3 candidati:

$$f(1, -2, 1) = 6 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{p.to di} \\ \text{max} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{max} \end{matrix} \quad f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}, -2\sqrt{\frac{6}{5}}, 0\right) = 5\sqrt{\frac{6}{5}} = \sqrt{30}$$
$$f\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}, 2\sqrt{\frac{6}{5}}, 0\right) = -\sqrt{30} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{p.to di min.} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{min} \end{matrix}$$

Esempio 4 $f(x, y, z) = x - 2y + z$

$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$

$\frac{1}{4}$ di sfera



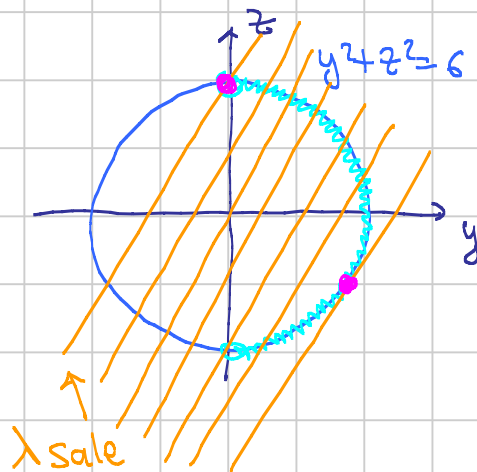
Come prima i moltiplicatori
producono $(1, -2, 1)$ e $(-1, 2, 1)$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
NO BUONO

Tutto si gioca sui p.ti di taglio, che sono quelli con $x=0$ e
quelli con $y=0$

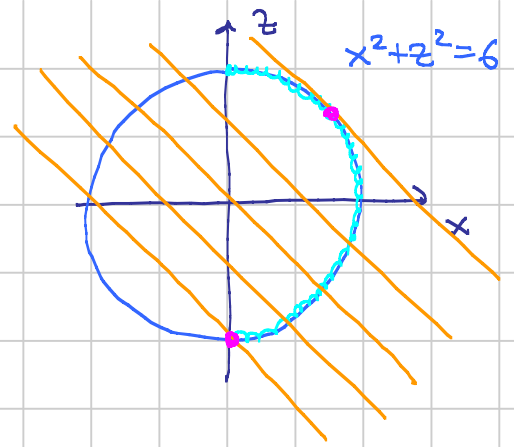
Caso $x=0$ Devo studiare max/min di
 $-2y + z$ con i vincoli
 $y^2 + z^2 = 6$ e $y \geq 0$

Con le linee di livello $-2y + z = \lambda$
 $\leadsto z = 2y + \lambda$



Questo produce 2 candidati: $(0, 0, \sqrt{6})$, $(0, 2\sqrt{\frac{6}{5}}, -\sqrt{\frac{6}{5}})$

Caso $y=0$ Devo studiare max/min
di $x+z$ con i vincoli
 $x^2+z^2=6$ e $x \geq 0$



Linee di livello $x+z = \lambda \leadsto z = -x + \lambda$

Questo produce 2 candidati:

$$(0, 0, -\sqrt{6})$$

$$(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$$

Confrontando i valori di $f(x, y, z)$ nei 4 p.ti si trovano
max/min.

Difficoltà della procedura:

- risolvere i sistemi che arrivano dai moltiplicatori
- capire / gestire gli insiemi di taglio.

— o — o —