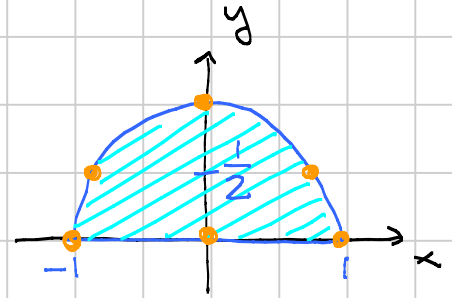


(Utilizzo misto di moltiplicatori e altre tecniche)

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$



Stat. interni e sing. interni : $\emptyset$

Osserviamo che max / min esistono per Weierstrass (va fatto per prima cosa)

Bordo, fatto di 2 pezzi

Semicirconferenza Possiamo usare i moltiplicatori MA

- dobbiamo escludere gli eventuali candidati con $y < 0$
- dobbiamo includere gli estremi della circ. tra i candidati ("bordi dei bordi" oppure "punti di taglio")

$$\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

1° sistema $\leadsto \dots \leadsto$ nessuna soluz.

2° sistema
$$\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

← NON SEMPLIFICARE x!!

$$x(\lambda - 1) = 0 \quad (1^a \text{ equ. raccolta})$$

$$\swarrow \\ x=0$$

$$\searrow \\ \lambda = 1$$

↓ 3° equ

↓ 2° equ

$$y = \pm 1$$

$$y = \frac{1}{2}$$

3°

$$\longrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

NO BUONO perché $y < 0$

Sono emersi

$$(0,1) \quad \boxed{(0,-1)}$$

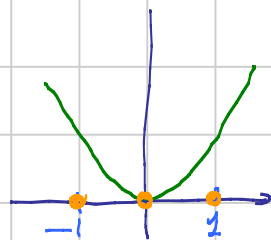
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Diametro Puoi usare i moltiplicatori con $\Phi(x,y) = y$ (prova!)
 ma forse è + comodo parametrizzare

$$(t, 0) \text{ con } t \in [-1, 1] \rightsquigarrow \varphi(t) = f(t, 0) = t^2$$

Nuovo candidato: $t = 0 \rightsquigarrow (0, 0)$

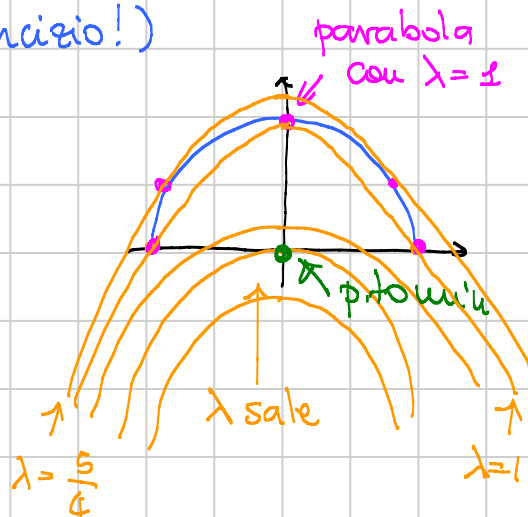


Non resta che sostituire i 6 p.ti in f (esercizio!)

Interpretazione con linee di livello

$$x^2 + y = \lambda \rightsquigarrow y = -x^2 + \lambda$$

Il disegno non chiarisce come è messa la linea di livello con $\lambda = 1$



$$f(-1, 0) = f(1, 0) = f(0, 1) = 1$$

$$f\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} > 1$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $f(x, y) = x^2 y^2$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3 - xy\}$$

$$x^2 + y^2 + xy - 3 \leq 0 \rightsquigarrow \text{che sarà mai?}$$

Non è nemmeno evidente che sia limitato

Step 1 Mostriamo che A è limitato

$$x^2 + y^2 + xy \leq 3 \rightsquigarrow x^2 + xy + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4}y^2 \leq 3$$

$$\rightsquigarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \leq 3$$

Ma allora y^2 è limitato ($y^2 \leq 4$ e quindi $|y| \leq 2$ cioè $-2 \leq y \leq 2$)

Inoltre $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 \leq 3$, quindi $-\sqrt{3} \leq x + \frac{y}{2} \leq \sqrt{3}$ e quindi

$$x \leq \sqrt{3} - \frac{y}{2} \leq \sqrt{3} + 1$$

$\uparrow$
 $y \geq -2$

$$x \geq -\sqrt{3} - \frac{y}{2} \geq -\sqrt{3} - 1$$

$\uparrow$
 $y \leq 2$

Così abbiamo dimostrato che, se $(x, y) \in A$, allora le variabili x e y sono limitate, quindi $A \subseteq$ rettangolo.

Inoltre A è chiuso (perché i vincoli sono $\geq$ e $\leq$), e quindi per W. max e min esistono.

N.B. Senza questa prima parte, non ha senso iniziare a cercarli !!!

Step 2 Stazionari interni: solo $(0, 0)$

Sing. interni: $\emptyset$

Step 3 Bordo via moltiplicatori con $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3$

1° sistema Non ha soluzioni

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$$

2° sistema

$$\begin{cases} 2x = \lambda(2x + y) \\ 2y = \lambda(2y + x) \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2xy &= \lambda(2x + y) \cdot y \\ 2xy &= \lambda(2y + x) \cdot x \end{aligned}$$

$$\lambda(2x + y)y = \lambda(2y + x)x$$

NON SEMPLIFICARE λ !!

$$\lambda(2\cancel{x}y + y^2 - 2y\cancel{x} - x^2)$$

$$\lambda = 0$$

$\downarrow 1^a + 2^a$
 $x = y = 0$ e
 non va bene
 nella 3^a $\therefore$

$$\downarrow x^2 = y^2$$

$$\uparrow y = x \leadsto 3x^2 = 3 \leadsto x = y = \pm 1$$

$$\downarrow y = -x \leadsto x^2 = 3 \leadsto x = \pm\sqrt{3}$$

$$y = \mp\sqrt{3}$$

Il bordo ha prodotto 4 candidati

$$(1,1) \text{ e } (-1,-1) \rightsquigarrow f = 2$$

$$(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \text{ e } (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \rightsquigarrow f = 6 \leftarrow \text{max}$$

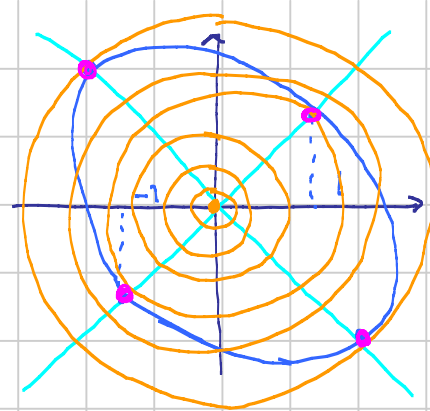
Non dimentichiamo

$$(0,0) \rightsquigarrow f = 0$$

↑
p.to di min

↑
min

p.ti di max



Oss. geometrica

Il metodo dei moltiplicatori cerca i p.ti del luogo che stiamo considerando in cui la linea di livello che passa è tangente al luogo.

Approccio alternativo allo stesso esercizio : SOSTITUIRE IL VINCOLO

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{vincolo: } x^2 + y^2 = 3 - xy$$

Quindi: invece di fare max/min di $x^2 + y^2$, posso fare max/min di $3 - xy$, oppure volendo fare min/max di xy .

Aurei potuto studiare $f(x,y) = xy$... saltando i passaggi ...

2° sistema

$$y = \lambda (2x + y)$$

$$x = \lambda (2y + x)$$

$$\phi = 0$$

$$xy = \lambda (2x + y)x$$

$$xy = \lambda (2y + x)y$$

e come prima si arrivava a $x = \pm y$.

Esempio 3 max/min $\{ xy : x^2 + y^2 = 3 - xy \}$

↑
Uguale!

Questo vuol dire studiare sul solo bordo, quindi niente staz. int. e sing. int., ma solo 1° e 2° sistema.

Le conclusioni sarebbero state

$$\rightarrow \text{max} = 1 \quad \text{p.ti di max: } (1,1) \text{ e } (-1,-1)$$

$$\rightarrow \text{min} = -3 \quad \text{p.ti di min: } (\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \text{ e } (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$$