

Moltiplicatori di Lagrange - Caso di un moltiplicatore

$$V = \{x \in \mathbb{R}^d : \Phi(x) = 0\} \quad (\text{luogo di zeri di } \Phi)$$

Se $x_0 \in V$ è p.to di max / min locale per $f(x)$

ristretta a V (cioè esiste $\epsilon > 0$ t.c. $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in V \cap B(x_0, \epsilon)$)

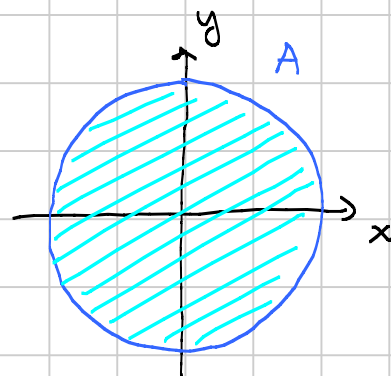
allora (se le funzioni f e Φ sono regolari) x_0 ricade in una delle seguenti due categorie

① Soluzioni del 1° sistema
$$\begin{cases} \nabla \Phi = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad (\text{p.ti di } V \text{ in cui } \nabla \Phi = 0)$$

② Soluzioni del 2° sistema
$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla \Phi \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad (\text{p.ti di } V \text{ in cui } \nabla f \text{ è multiplo di } \nabla \Phi)$$

Esempio 1 $f(x, y) = x + 2y$
 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Staz. interni : $\nabla f = 0 \quad \begin{cases} 1 = 0 \\ 2 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$



Sing. interni : $\emptyset$

NOTA PRELIMINARE: A è compatto + f continua
 $\Rightarrow$ max e min esistono.

Già ora sappiamo che i p.ti di max / min esistono e stanno sul bordo.

Ora il bordo di A è
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{\Phi(x, y)} = 0\}$$

quindi è il luogo di zeri di $\Phi(x, y)$

1° sistema

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Nessuna soluzione
(di solito succede così)

2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

3 equ. cu 3 incognite:
di solito c'è soluzione

Dividendo le prime 2 equ.: $\frac{1}{2} = \frac{x}{y} \leadsto y = 2x$

$\leadsto$ sostituisco nella 3ª $x^2 + 4x^2 = 1 \leadsto x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$
(stesso segno)

Abbiamo quindi 2 candidati
 $\nearrow$ p.to di max

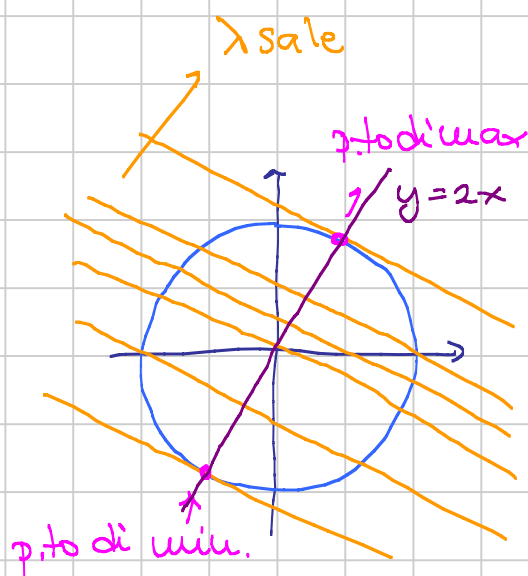
$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \leadsto f(\dots) = \frac{5}{\sqrt{5}} = \boxed{\sqrt{5}} \text{ max}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \leadsto f(\dots) = \boxed{-\sqrt{5}} \text{ min}$$

$\uparrow$ p.to di min.

Voleudo si può interpretare con le linee di livello

$$x + 2y = \lambda \leadsto y = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2}$$



Oss. Voleudo si poteva trattare il bordo parametrizzando

$$\text{bordo di } A = \{(\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$$

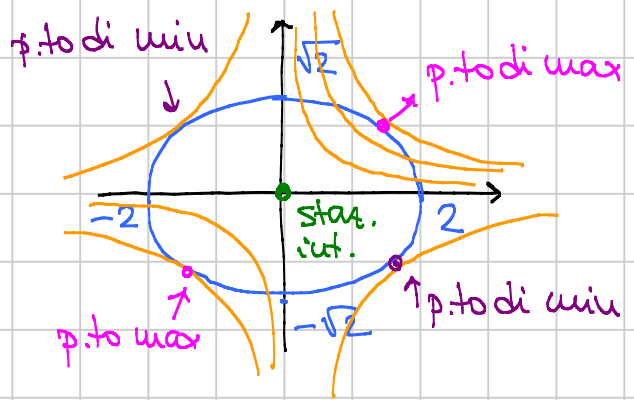
$$\varphi(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos t + 2 \sin t \text{ da studiare per } t \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi'(t) = -\sin t + 2 \cos t = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin t}{\cos t} = 2 \Leftrightarrow \tan t = 2$$

Conoscendo $\tan t$, con un po' di precorso trovo $\sin t$ e $\cos t$.

Esempio 2 $f(x,y) = xy$
 $A = \dots x^2 + y^2 \leq 4$

Prescan con le linee di livello:
 aspettiamo 2 p.ti di max e
 2 " " min.



Stazionari interi: $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \rightsquigarrow (0,0)$ Sing. int.: $\emptyset$

Bordo: luogo di zeri di $x^2 + y^2 - 4 = \Phi(x,y)$

1° sistema $\begin{cases} \Phi_x = 0 \\ \Phi_y = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \rightsquigarrow \emptyset$

2° sistema $\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ \Phi = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 4\lambda y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} xy = 2\lambda x^2 \\ xy = 4\lambda y^2 \end{cases}$

$\rightsquigarrow 2\lambda x^2 = 4\lambda y^2 \rightsquigarrow 2\lambda(2y^2 - x^2) = 0$

$\swarrow$
 $\lambda = 0$
 (1ª e 2ª equ.) $\downarrow$
 $x = y = 0$
 $\downarrow$
 incompatibile con 3ª

$\searrow$
 $2y^2 = x^2$
 $\downarrow$ 3ª equ

$2x^2 = 4 \rightsquigarrow x = \pm\sqrt{2}$
 $y = \pm 1$ } 4 possibili scelte dei segni

Abbiamo in conclusione 5 candidati:

$(0,0) \rightsquigarrow f(0,0) = 0$

$(\sqrt{2}, 1)$ e $(-\sqrt{2}, -1) \rightsquigarrow f(\dots) = \sqrt{2}$

$(-\sqrt{2}, 1)$ e $(\sqrt{2}, -1) \rightsquigarrow f(\dots) = -\sqrt{2}$

max = $\sqrt{2}$ con 2 p.ti max

min = $-\sqrt{2}$ con 2 p.ti min

Oss. Si poteva parametrizzare il vincolo?

$$x^2 + 2y^2 = 4$$

Sì! $(2 \cos t, \sqrt{2} \sin t) : t \in [0, 2\pi]$

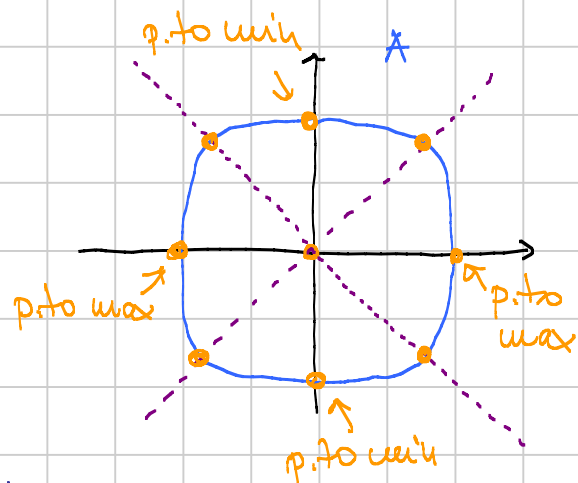
[Esercizio: provare a vedere come sarebbero venuti i conti]

Esempio 3

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$$

A compatto + f continua $\Rightarrow$ max / min esistono



Staz. interni $\leadsto \dots$ solo $(0, 0)$

Sing. interni : $\emptyset$

1° sistema

$$\phi(x, y) = x^4 + y^4 - 1$$

$$\begin{cases} 4x^3 \\ 4y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \leadsto \emptyset$$

2° sistema

$$\begin{cases} 2x = \frac{2}{\lambda} x^3 \\ 2y = \frac{2}{\lambda} y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

Grande tentazione (EVITARE!);
semplificare x e y nella 1ª e 2ª equ.

$$x(1 - 2\lambda x^2) = 0$$

$$x = 0$$

3ª equ

$$y = \pm 1$$

$$(0, 1), (0, -1)$$

$$x^2 = \frac{1}{2\lambda}$$

$$y(1 - 2\lambda y^2) = 0$$

$$y = 0$$

3ª equ

$$x = \pm 1$$

$$(1, 0) \text{ e } (-1, 0)$$

$$y^2 = \frac{1}{2\lambda}$$

Quindi resta $x^2 = y^2$, da cui $x^4 = y^4$ e andando nella 3ª equ

$$x^4 = \frac{1}{2} = y^4 \leadsto x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \quad y = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

Restano 3 g.ti da sostituire

$$(0,0) \rightsquigarrow f(0,0) = 0$$

$$(\pm 1, 0) \rightsquigarrow f(\pm 1, 0) = \textcircled{1} \quad \text{Max}$$

$$(0, \pm 1) \rightsquigarrow f(0, \pm 1) = \textcircled{-2} \quad \text{min}$$

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rightsquigarrow f(\dots) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Oss. Proviamo ad interpretare con le linee di livello

$$x^2 - 2y^2 = \lambda \rightsquigarrow \text{iperbole con asintoti}$$
$$x^2 = 2y^2 \rightsquigarrow x = \pm \sqrt{2}y$$

— o — o —

