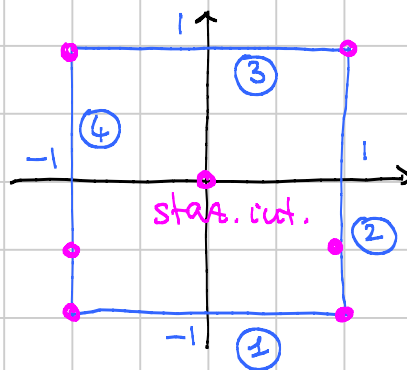


Esempio 1 $f(x,y) = xy + y^2$

$$A = [-1,1] \times [-1,1]$$

Linee di livello e disug. non completamente ovvie 😞

Procedura standard



① P.ti stazionari interni $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \leadsto x = 0$

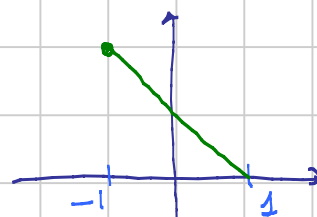
L'unico p.to è $(0,0)$

② P.ti singolari interni: fortunatamente non ci sono 😊

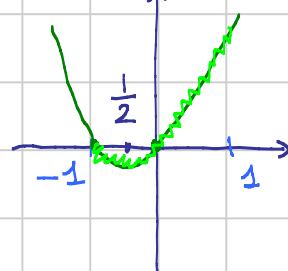
③ Bordo: unione di 4 segmenti. Li parametizzo tutti

3.1 $(t, -1)$ con $t \in [-1,1]$. Considero la restrizione al segmento

$$\varphi_1(t) = f(t, -1) = -t + 1 \text{ e la studio per } t \in [-1,1]$$

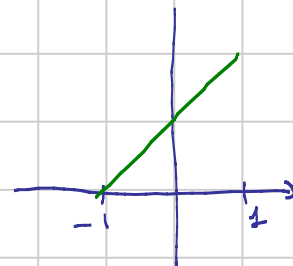
Max per $t = -1 \leadsto$ p.to $(-1, -1)$ min per $t = 1 \leadsto$ p.to $(1, -1)$ 3.2 $(1, t)$ con $t \in [-1,1]$. La restrizione è

$$\varphi_2(t) = f(1, t) = t + t^2 \text{ con } t \in [-1,1]$$

Max per $t = 1 \leadsto$ p.to $(1, 1)$ min per $t = \frac{1}{2} \leadsto$ p.to $(1, \frac{1}{2})$ 

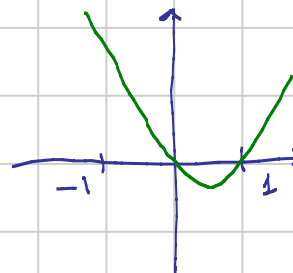
3.3 $(t, 1)$ con $t \in [-1, 1]$

$\varphi_3(t) = t+1$ max / min nei
2 estremi



3.4 $(-1, t)$ con $t \in [-1, 1]$

$$\varphi_4(t) = f(-1, t) = -t + t^2$$



Max per $t = -1 \rightsquigarrow (-1, -1)$

min per $t = \frac{1}{2} \rightsquigarrow (-1, \frac{1}{2})$

Alla fine abbiamo 7 candidati, che andiamo a sostituire in $xy + y^2$

Conclusione

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(-1, -1) = 2$$

$$f(1, -1) = 0$$

$$f(1, 1) = 2$$

$$f(-1, 1) = 0$$

$$f(1, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$

$$f(-1, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$

$\rightarrow \max = 2$, p.ti di max: $(-1, -1)$ e $(1, 1)$

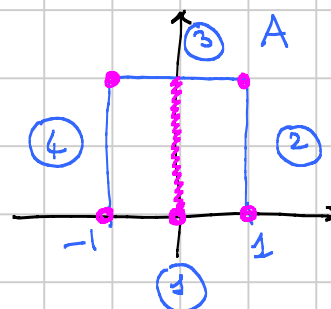
$\rightarrow \min = -\frac{1}{4}$, p.ti di min: $(1, -\frac{1}{2})$ e $(-1, \frac{1}{2})$.

Esempio 2 $f(x, y) = x^4 - x^2 y$

$$A = [-1, 1] \times [0, 2]$$

① Staz. interni :
$$\begin{cases} 4x^3 - 2xy = 0 \\ -x^2 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $x = 0$
y qualunque

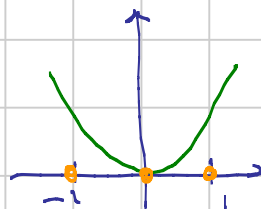


Quindi tutto l'asse y è fatto da p.ti stazionari (infiniti candidati!)

② Sing. interni : $\emptyset$ 😊

③ 4 pezzi di bordo

3.1 $(t, 0) \rightsquigarrow \varphi_1(t) = t^4$ con $t \in [-1, 1]$



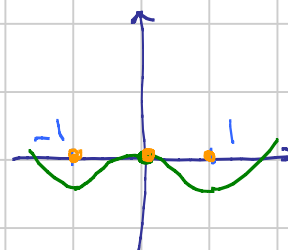
Candidati: $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$

3.2 $(1, t) \rightsquigarrow \varphi_2(t) = 1 - t$ con $t \in [0, 2]$

È una retta, quindi i candidati sono gli estremi: $(1, 0)$, $(1, 2)$

3.3 $(t, 2) \rightsquigarrow \varphi_3(t) = t^4 - 2t^2$ che va studiata per $t \in [-1, 1]$

$$\varphi_3'(t) = 4t^3 - 4t = 4t(t^2 - 1)$$



3.4 $(-1, t) \rightsquigarrow \varphi_4(t) = 1 - t \rightsquigarrow$ ancora una volta gli estremi

Confrontiamo i candidati

$$f(0, y) = 0$$

$$f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$$

$$f(1, 2) = f(-1, 2) = -1$$

Conclusione:

$$\rightarrow \max = 1, \text{ p.ti di max: } (\pm 1, 0)$$

$$\rightarrow \min = -1, \text{ p.ti di min: } (\pm 1, 2)$$

Esempio 3 $f(x, y) = x^4 - x^2y$

⋮

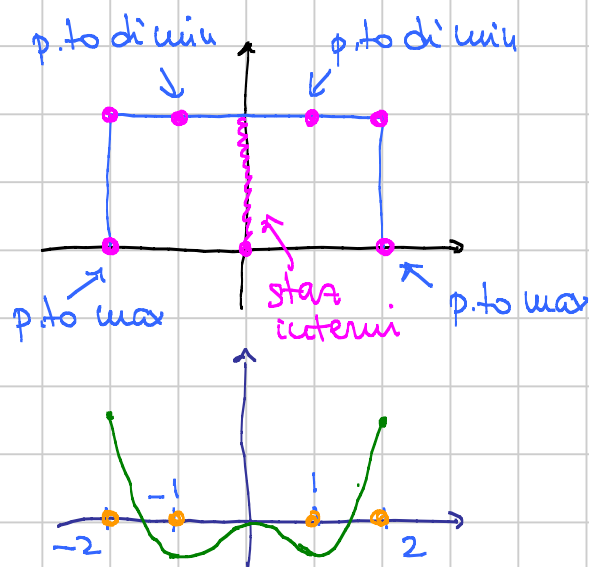
3.1 $(\pm 2, 0)$ e $(0, 0)$

3.2 $(2, 0)$ e $(2, 2)$

3.4 $(-2, 0)$ e $(-2, 2)$

3.3 $\varphi_3(t) = t^4 - 2t^2$ con $t \in [-2, 2]$

$$A = [-2, 2] \times [0, 2]$$



$$f(0, y) \equiv 0$$

$$f(\pm 2, 0) = 16 \quad \leftarrow \text{Max e p.ti di max}$$

$$f(\pm 2, 2) = 8$$

$$f(\pm 1, 2) = -1 \quad \leftarrow \text{min e p.ti di min}$$

Esempio 4

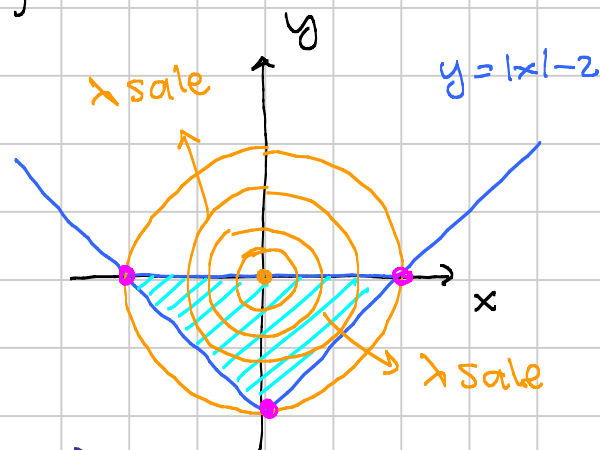
$$f(x, y) = x^2 y^2$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - 2 \leq y \leq 0\}$$

Linee di livello : $x^2 y^2 = \lambda$

$\rightarrow \text{min} = 0$ p.to di min : $(0, 0)$

$\rightarrow \text{max} = 4$, p.ti di max : $(-2, 0)$
 $(2, 0)$ e $(0, -2)$



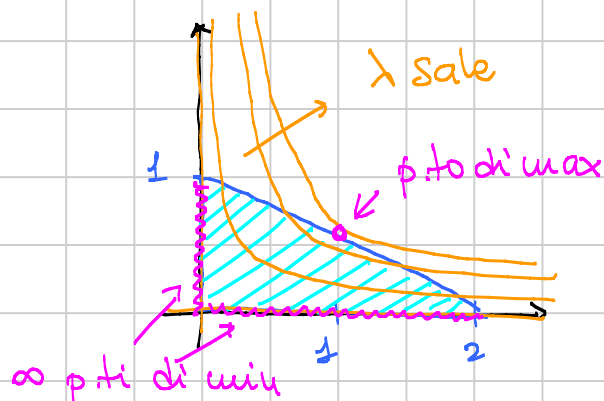
Esempio 5

$$f(x, y) = xy$$

A come in figura

linee di livello : assi per $\lambda = 0$
e poi iperboli per $\lambda > 0$

$\rightarrow \text{min} = 0$, p.ti di min = infiniti p.ti dei 2 cateti



Come determino il p.to di max? Parametrizzo l'ipotenusa!

$$y = 1 - \frac{x}{2} \quad \leadsto \quad 2y = 2 - x \quad \leadsto \quad y = t, \quad x = 2 - 2t \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

$(2 - 2t, t)$ con $t \in [0, 1]$. Considero la restrizione

$$\varphi(t) = f(2 - 2t, t) = 2t - 2t^2 \quad \varphi'(t) = 2 - 4t \quad \leadsto \quad t = \frac{1}{2}$$

Quindi $\text{max} = \frac{1}{2}$, p.to di max : $(1, \frac{1}{2})$.

Esempio 6

$$f(x,y) = (x-y)^2$$

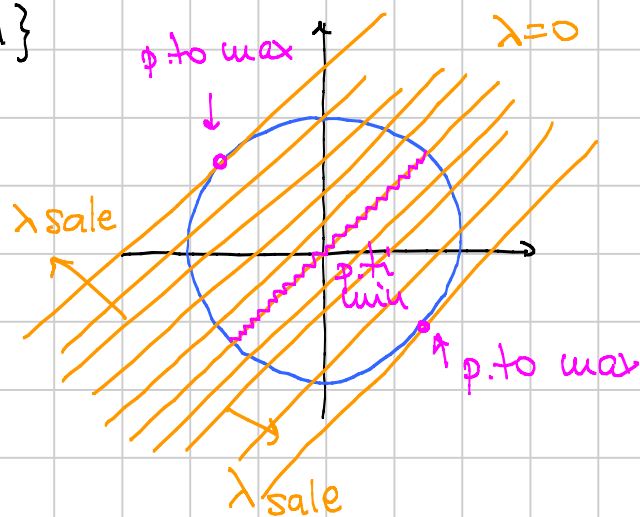
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Linee di livello : $(x-y)^2 = \lambda$

Per $\lambda < 0 \leadsto \emptyset$

Per $\lambda = 0 \leadsto x = y$

Per $\lambda > 0 \leadsto x - y = \pm \sqrt{\lambda}$
 $y = x \pm \sqrt{\lambda}$



$\rightarrow \min = 0$ con ∞ p.ti di min (tutti quelli della retta $y=x$ che cascano dentro il cerchio)

$\rightarrow \max = 2$, p.ti di max: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

— o — o —