

Max - min per funzioni di più variabiliRecap teoria $\min \{f(x) : x \in A\}, \max \{f(x) : x \in A\}$ Teorema di Weierstrass Sia $A \subseteq \mathbb{R}^d$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo(i) A compatto (chiuso + limitato)(ii) f è continua.Allora di sicuro f ammette max/min in A .

Chi sono i candidati p.ti di max/min?

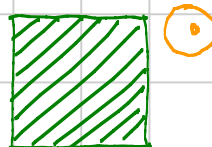
- ① P.ti x interni ad A t.c. $\nabla f(x) = 0$ (stazionari interni)
- ② P.ti x " " " $\nabla f(x)$ non esiste (singolari interni)
- ③ P.ti del bordo di A . (bordo)

Approcci:

- disuguaglianze elementari
 - linee di livello
 - parametrizzazione del bordo
 - moltiplicatori di Lagrange
- } per trattare tutto A
- } per trattare il bordo di A

Recap definizioni

- $A \subseteq \mathbb{R}^d$ si dice limitato se $\exists R > 0$ t.c. $A \subseteq B(0, R)$
palla di raggio sufficiente
- $x_0 \in A$ si dice interno ad A se
esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq A$
- A si dice chiuso se per ogni $x \notin A$
esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \cap A = \emptyset$



Esempio 1 $f(x,y) = x - 3y$

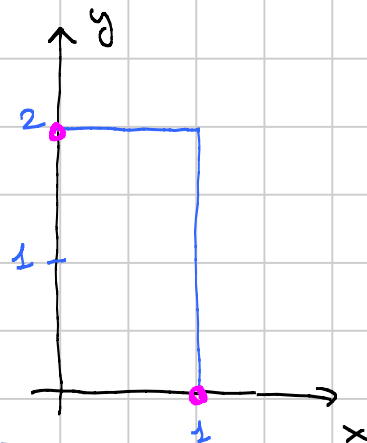
$$A = [0, 1] \times [0, 2]$$

1° modo: disug. elementari

$$f(x,y) = x - 3y \leq 1 - 0 = 1 \text{ per } (x,y) \in A$$

$\uparrow$
 x + grande poss.
 y + piccolo poss.

Vale il segno di $=$ se e solo se $x=1$ e $y=0$.



Di conseguenza: $\max = 1$, p.to di max: $(1,0)$

$$f(x,y) = x - 3y \geq 0 - 3 \cdot 2 = -6 \text{ per } (x,y) \in A$$

$\uparrow$
 x + piccolo poss.
 y + grande poss.

con $=$ se e solo se $x=0$ e $y=2$.

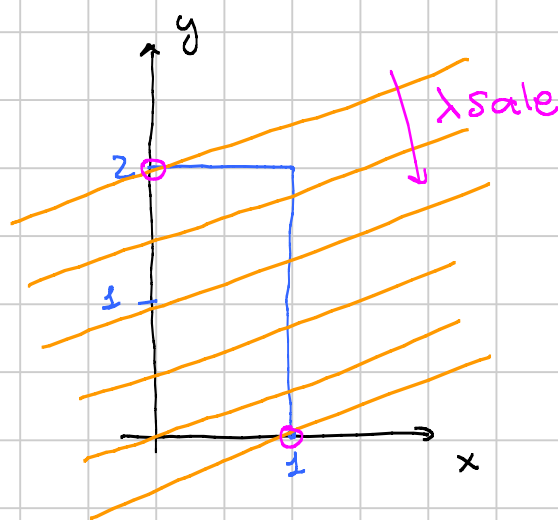
Di conseguenza: $\min = -6$, p.to di min: $(0,2)$

2° modo: metodo delle linee di livello

Disegniamo le linee di livello di f ,
cioè

$$x - 3y = \lambda \quad \leadsto \quad y = \frac{x}{3} - \frac{\lambda}{3}$$

Trovare max e p.ti di max = trovare
la linea di livello con λ max tra
quelle che intersecano A



Trovare il min = linea di livello con λ min che interseca A

Dalla figura è evidente che $(1,0)$ è p.to di max e $(0,2)$ è p.to di min.

Esempio 2 $f(x,y) = x + 2y$

$A = [1,3] \times [0,2]$

1° metodo

$f(x,y) = x + 2y \leq 3 + 2 \cdot 2 = 7$

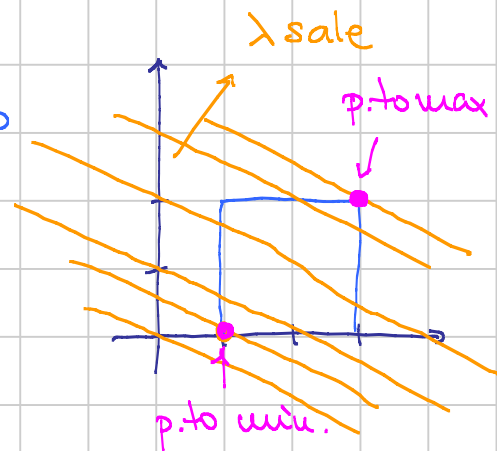
↑
con = se e solo se $x=3$ e $y=2$

$f(x,y) = x + 2y \geq 1 + 2 \cdot 0 = 1$

↑
con = se e solo se $x=1$ e $y=0$

Conclusione : $\rightarrow \max = 7$, p.to di max: $(3,2)$

$\rightarrow \min = 1$, p.to di min: $(1,0)$



2° metodo

$x + 2y = \lambda \leadsto y = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2}$

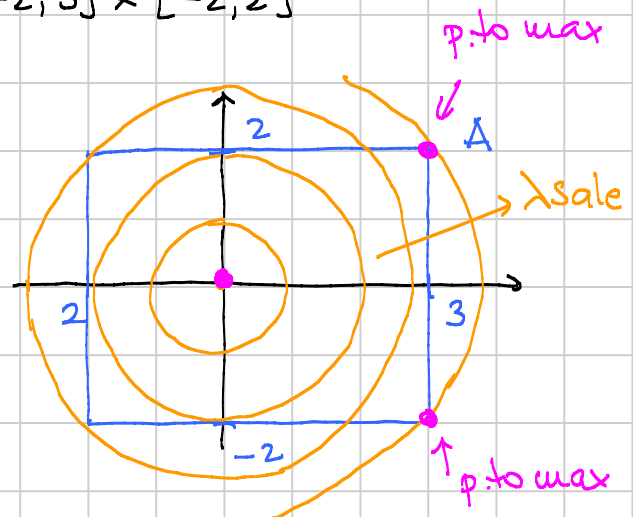
Esempio 3 $f(x,y) = x^2 + y^2$

$A = [-2,3] \times [-2,2]$

Linee di Livello : $x^2 + y^2 = \lambda$

$\rightarrow \min = 0$, p.ti di min: $(0,0)$

$\rightarrow \max = 13$, p.ti di max: $(3,2)$
 $(3,-2)$



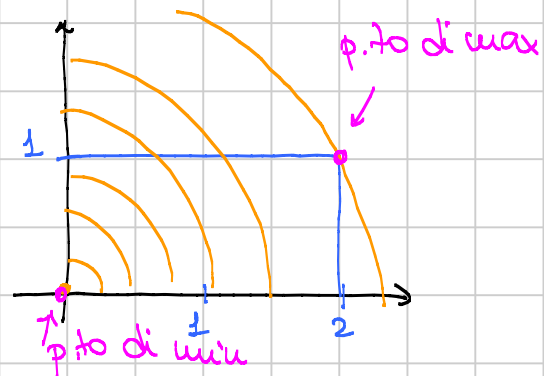
Esempio 4 $f(x,y) = x^2 + y^2$

$A = [0,2] \times [0,1]$

$x^2 + y^2 = \lambda$

$\rightarrow \min = 0$, p.ti di min: $(0,0)$

$\rightarrow \max = 5$, p.ti di max: $(2,1)$



Esempio 5

$$f(x,y) = x^2 - y^3$$

$$A = [-2, 2] \times [-1, 2]$$

Disuguaglianze elementari

$$x^2 - y^3 \leq 4 - (-1) = 5 \quad \text{in } A$$

$\uparrow$
 x^2 + grande poss.

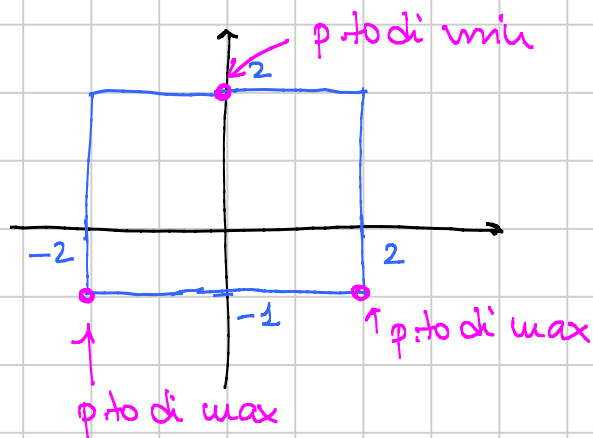
y^3 + piccolo poss.

con = se e solo se $x = \pm 2$ e $y = -1$

$$x^2 - y^3 \geq 0 - 8 \quad \text{in } A \quad \text{con = se e solo se } x = 0 \text{ e } y = 2$$

$\uparrow$
 x^2 + piccolo poss.

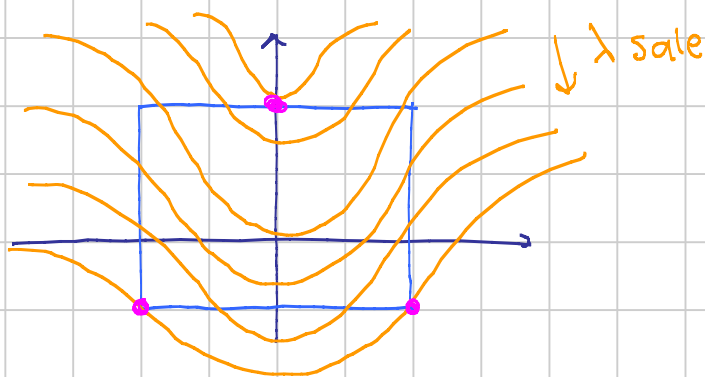
y^3 + grande poss.



Conclusione: $\rightarrow$ max = 5, p.ti di max: $(-2, -1)$ e $(2, -1)$

$\rightarrow$ min = -8, p.ti di min: $(0, 2)$

Linee di livello? $x^2 - y^3 = \lambda \rightsquigarrow y^3 = x^2 - \lambda \rightsquigarrow y = \sqrt[3]{x^2 - \lambda}$



Esempio 6

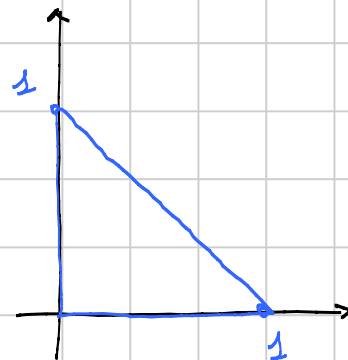
$$f(x,y) = x + 2y$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$$

$$f(x,y) = x + 2y \geq 0 + 0 = 0$$

con = se e solo se $x = 0$ e $y = 0$.

Quindi: min = 0, p.ti di min: $(0, 0)$.



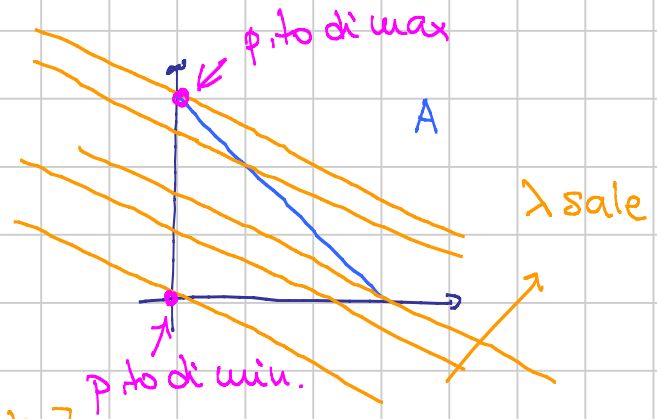
$f(x,y) = x+2y \leq 1 + 2 \cdot 1 = 3$ con = se e solo se $x=1$ e $y=1$
 MA IL PUNTO $(1,1) \notin A$, quindi il metodo non funziona.

Proviamo quindi le linee di livello

$$x+2y = \lambda \leadsto y = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2}$$

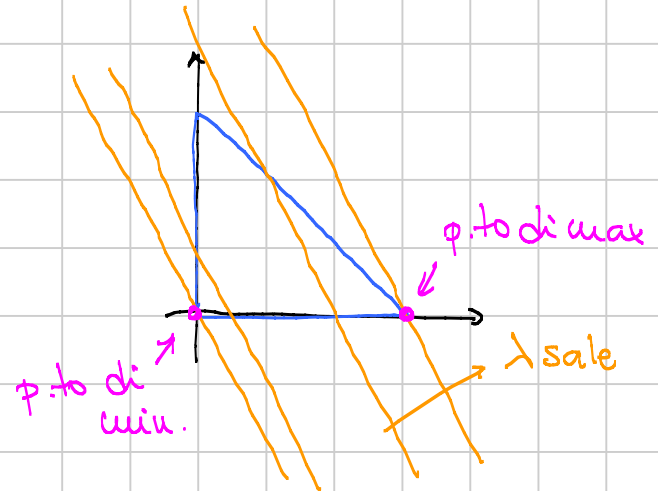
Quindi: $\max = 2$, p.to di max: $(0,1)$

[Corretto dopo video]



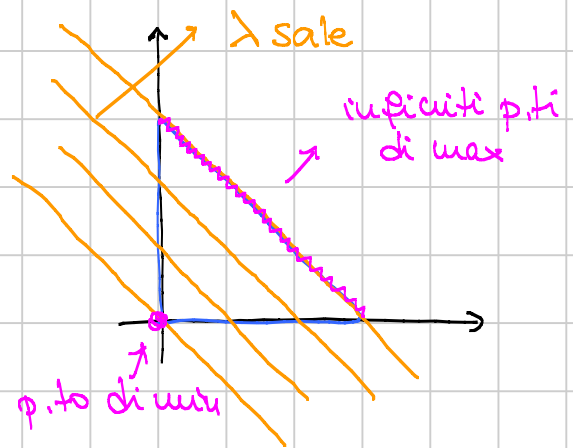
Esempio 7 $f(x,y) = 2x+y$
 A come prima

$$2x+y = \lambda \leadsto y = -2x + \lambda$$



Esempio 8 $f(x,y) = x+y$
 A come prima

$$x+y = \lambda \leadsto y = -x + \lambda$$



$\rightarrow \min = 0$, p.ti di min: $(0,0)$

$\rightarrow \max = 1$, p.ti di max: TUTTO il segmento
 di estremi $(1,0)$ e $(0,1)$.

— o — o —